

# La noción de demostración matemática, una aproximación desde la teoría socioepistemológica para la educación a distancia

Luis F. Ramírez Oviedo<sup>1</sup>

1. Profesor-Investigador, Universidad Estatal a Distancia, San José, Costa Rica; [lramirez@uned.ac.cr](mailto:lramirez@uned.ac.cr)

**ABSTRACT:** The teaching of mathematics in Costa Rica considers the demonstration in the school curriculum, from secondary to university education, in accordance with international standards embodied in the curricula of secondary education and the models of each university, but the practices associated with argumentation based on logic and deduction represent a challenge for students and teachers at all levels. It is intended in this reflective essay, to point out the relevance of an adequate approach to demonstration as an input for the learning of mathematics and the development of teaching and learning processes, as well as some reflections on works linked to the social construction of knowledge, as well as experiences that have been generated and the importance of the problematization of knowledge for its construction and resignification.

**Key words:** Teacher education, socioepistemology, mathematics proof, distance education, Argumentation, teaching mediation.

**RESUMEN:** La enseñanza de la matemática en Costa Rica considera la demostración en el currículo escolar, desde la educación secundaria hasta la universitaria, en concordancia con estándares internacionales plasmados en los programas de estudio de la enseñanza media y los modelos propios de cada universidad, pero las prácticas asociadas a la argumentación basadas en la lógica y deducción representan un reto para estudiantes y docentes en todos los niveles. Se pretende en este ensayo reflexivo, señalar la pertinencia de un adecuado abordaje de la demostración como insumo para el aprendizaje de la matemática y el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje, así, como algunas reflexiones sobre trabajos vinculados con la construcción social del conocimiento, así como experiencias que se han generado y la importancia de la problematización del saber para su construcción y resignificación.

**Palabras clave:** Formación docente, Socioepistemología, demostración matemática, educación a distancia, argumentación, mediación docente.

## INTRODUCCIÓN

La carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad Estatal a Distancia (UNED) se encuentra orientada a la formación de profesionales docentes de matemática para la educación secundaria costarricense, así como para la enseñanza en cursos universitarios iniciales. Esta carrera se rige bajo el modelo de educación a distancia establecido por la propia universidad, en el cual, la persona estudiante planifica y regula su avance en el estudio y comprensión de los contenidos en forma autónoma, dando suma importancia al material escrito o digital planificado por un equipo docente (Universidad Estatal a Distancia, 2004). Aunque existen espacios virtuales sincrónicos y asincrónicos de interacción entre estudiantes y docentes, cada estudiante administra sus procesos de aprendizaje de forma independiente.

El programa de estudios está constituido por tres grandes áreas: matemáticas, educación y humanidades (Universidad Estatal a Distancia, 2019), nos centraremos en la primera de las áreas y el uso de la demostración matemática como actividad de mediación pedagógica y de evaluación de los aprendizajes, para intentar comprender la manera en que la persona estudiante de la carrera Enseñanza de la Matemática de la UNED construye la noción de demostración matemática y las diferentes formas en que desde la teoría de la Socioepistemología se puede favorecer los procesos de demostración o argumentación en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

En las diferentes asignaturas (que coinciden con diferentes ramas de la matemática) de la carrera, se han elaborado materiales como unidades didácticas, guías de estudio (como apoyo a los libros externos) y materiales complementarios que permiten exponer de forma rigurosa y detallada los contenidos teóricos en estudio. En estos materiales, se presentan demostraciones de proposiciones y teoremas con el fin de escudriñar los objetos matemáticos, exponiendo los principales resultados de cada rama de la matemática con un discurso escolar clásico en el campo de la matemática, es decir, basado en la presentación constructiva, axiomática y deductiva de los conceptos y sus propiedades.

Los materiales mencionados, aunque contemplan una mayor serie de ejemplos y un mayor detalle en la presentación de los contenidos, usualmente no incluyen elementos orientadores que permitan a la persona estudiante construir de forma independiente la noción de demostración, a diferencia de la educación presencial, en la cual la persona docente comunica a través de su discurso matemático escolar las características de cada demostración presentada y la lógica que siguen éstas, permitiendo la construcción de la misma a partir de las verdades preexistentes que se comunican en la clase como menciona Cantoral et al. (2014). Entonces surge la interrogante: ¿cómo se logra favorecer la construcción de la noción de demostración matemática en una universidad con modelo pedagógico como el de la Universidad Estatal a Distancia? Es tarea difícil responder a esta pregunta, pero, podemos observar como las aproximaciones a problemas similares a través de la teoría socioepistemológica y la problematización del saber (en este caso la demostración y la argumentación) han generado reflexiones que pueden orientar el desarrollo de estrategias que favorezcan la construcción social de la noción de demostración en las personas estudiantes de la carrera de enseñanza de la matemática (futuras personas docentes) en sus cursos de matemática.

## **PERTINENCIA DE LA DEMOSTRACIÓN EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA**

Una de las principales razones para procurar la construcción de una noción sólida de demostración matemática en las personas estudiantes de Enseñanza de la Matemática, radica en la posibilidad de utilizar adecuadamente la misma para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel de enseñanza media (secundaria) Ramírez (2022). El Ministerio de Educación Pública, en sus programas de estudio vigentes, recomienda en sus indicaciones metodológicas seguir procesos de conjetura, razonamiento, argumentación y demostración de algunos teoremas de geometría, propiedades de las figuras geométricas o la irracionalidad de  $\sqrt{2}$  por ejemplo, como estrategia para que las personas estudiantes alcancen uno de los cinco procesos centrales de sus programas: Razonar y argumentar (Ministerio de Educación Pública, 2012).

Los programas vigentes de la enseñanza media costarricense obedecen en parte a estándares internacionales, que buscan desarrollar la competencia matemática en el individuo como parte de la sociedad, según Rico (2007), uno de los procesos destacados por el proyecto PISA es argumentar, este proceso se encuentra estrechamente relacionado con la noción de demostración matemática y sus diferentes métodos. Con respecto al proceso de razonar y argumentar, el Ministerio de Educación Pública (2012) señala “se trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos.” (p. 24)

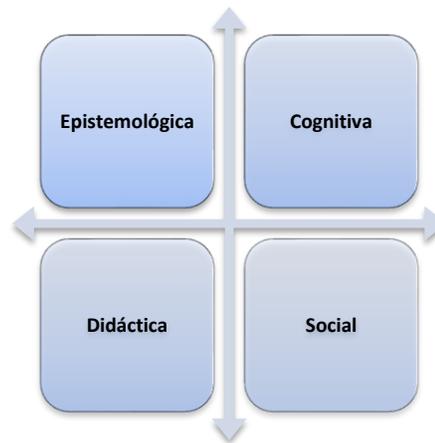
Las actividades relacionadas con el proceso de razonar y argumentar forman parte de la actividad docente que propone el Ministerio de Educación Pública en sus programas, a lo largo de todos los cinco o seis años de la enseñanza media en tercer y cuarto ciclo y su desarrollo se vincula estrechamente con la noción de demostración con que cuenta la persona docente, ya sea una noción que construyó a partir del discurso matemático escolar recibido en su formación inicial, en una noción inferida de demostraciones observadas en los diferentes textos, o de construcciones sociales como se ha planteado en diferentes investigaciones con un enfoque socioepistemológico (Crespo y Farfán, 2005; Calvillo y Cantoral, 2007; Crespo et al., 2010).

Para Crespo (2008), es la argumentación el proceso que se enseña o aprende en el aula de matemática considerando el contexto sociocultural y es este el que permite la construcción social de la noción de demostración matemática, esto nos permite cuestionarnos si el uso de la demostración matemática en la enseñanza y aprendizaje de la matemática debe abordarse desde la experiencia formal que posee el profesor o la profesora como consecuencia de un discurso previamente establecido y aprobado por la comunidad matemática o también debe tomar en cuenta los aspectos socioculturales en que se encuentra inmerso. Para comprender un poco mejor, las relaciones del contexto, revisemos como la problematización del objeto de conocimiento puede aportar elementos a la construcción social de la noción de demostración.

## **PROBLEMATIZACIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA**

Según lo señalado por Reyes y Cantoral (2014), la teoría socioepistemológica considera cuatro dimensiones (ver figura 1) para planificar y analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática: cognitiva, epistemológica, didáctica y social, desde las cuales se aborda la construcción del conocimiento matemático, en esta integración de las cuatro dimensiones se destaca la componente social como transversal para dicha construcción, a diferencia de un acercamiento centrado en aspectos meramente epistemológicos de los mismos, sino más bien en las prácticas socioculturales que viven docentes y estudiantes para comprender estos objetos y la forma en que redimensionan su propia noción de la matemática. Para Cantoral et al. (2015), la comprensión del saber matemático desde sus cuatro dimensiones requiere de problematizar el saber, es decir, situar el saber en el contexto sociocultural de la persona estudiante y del conocimiento mismo, el cual toman en cuenta múltiples elementos como la historia y aspectos de la comunidad en un sentido que va desde lo local hasta lo global, para su uso y comprensión en las prácticas cotidianas.

**Figura 1.** Dimensiones de la teoría socioepistemológica



Anteriormente, se resaltaba la pertinencia de la demostración o los procesos de argumentación en el currículo escolar costarricense y es claro que son las personas docentes quienes tienen la responsabilidad de articular la mediación pedagógica de los diferentes conceptos matemáticos y el desarrollo de procesos de argumentación, es por tal motivo, que la noción de demostración matemática con que cuenten las personas docentes será fundamental para alcanzar el desarrollo de las competencias matemáticas. En la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UNED, se introduce la noción de demostración, así como las principales técnicas en la asignatura Lógica y Teoría de Conjuntos en una etapa inicial de la carrera y se continúa su mediación en todos los cursos del área de matemática posteriores.

Una de las asignaturas que presenta mayor reto en la formación de docentes de matemática en la Universidad Estatal a Distancia es Análisis Real (Ramírez, 2022), por su abstracción, el formalismo y la rigurosidad con que abordan los objetos matemáticos en la unidad didáctica base de la asignatura, este texto académico presenta los principales resultados sobre el campo de los números reales, estudia las sucesiones numéricas, series numéricas, sucesiones y series de funciones, pero el enfoque de este material está centrado en los objetos matemáticos como conocimiento puro (componente epistemológica). Al respecto del estudio de las sucesiones y series en un ambiente educativo superior, Calvillo y Cantoral (2007) proponen un abordaje del estudio de la noción de convergencia de sucesiones y series numéricas inicialmente desde la intuición y la visualización, destacando que fue de esta forma (contexto histórico y social) como se establecieron los primeros criterios de convergencia en los siglos XVII y XVIII y además, rescatando que una adecuada visualización de la sucesión y su representación gráfica puede facilitar la comprensión formal (lógica-deductiva) de la convergencia tanto de sucesiones como series, lo cual, favorece los procesos de argumentación.

Si bien, la unidad didáctica de Análisis Real con que se cuenta en la UNED, no requiere una modificación en la forma en que expone los contenidos pues lo hace con un nivel profesional editado y validado por especialistas, en la mediación de la asignatura a través de la plataforma virtual pueden agregarse elementos o estrategias didácticas formativas que favorezcan un acercamiento a los objetos y su génesis en formas alternativas, vinculándolos con el contexto histórico, con argumentaciones que podrían ser consideradas válidas hace 300 años y que hoy en día sabemos que carecen de la rigurosidad lógica que garantiza su validez, y es justamente ese un punto clave, una aproximación más intuitiva, exploratoria inclusive desde la física o la geometría analítica u otros contextos, puede ofrecer una mejor visualización de los objetos y sus propiedades, permitiendo una noción

más completa de lo que se pretende demostrar y al mismo tiempo, descubrir las deficiencias que presentan dichas argumentaciones puede ayudar a redescubrir la importancia de la deducción formal en la argumentación.

Por otro lado, Crespo y Farfán (2005) desarrollaron una investigación con estudiantes de carreras como Profesorado en Matemática e Informática, desde una aproximación socioepistemológica sobre las argumentaciones por reducción al absurdo y ésta les permite concluir que el contexto sociocultural y las prácticas profesionales de los participantes influyeron en sus argumentaciones ante las actividades planteadas, así como la noción de reducción al absurdo, que solamente se visualizó su uso en el contexto escolar. La demostración matemática por reducción al absurdo es muy utilizada en los procesos de formación inicial de docentes de matemática, pero su noción puede resultar compleja de comprender fuera del contexto matemático, es por eso que resulta fundamental, explorar los elementos socioculturales de la noción de demostración por reducción al absurdo al igual que otras técnicas con base axiomática deductiva, que en otros contextos resulta mucho más difícil brindar una conexión con otro tipo de objetos.

Brindar a los futuros docentes actividades orientadas a problematizar el saber matemático, en nuestro caso una o varias técnicas de argumentación y demostración, puede favorecer el empoderamiento docente Reyes y Cantoral (2014), de tal modo que la persona estudiante (futura persona docente) genere una reflexión social de la noción de demostración y esto le permita del mismo modo construir su práctica docente, tomando en cuenta una aproximación socioepistemológica. Reestructurar las prácticas docentes de las asignaturas de matemática en la formación de docentes de matemática de la Universidad Estatal a Distancia no requiere necesariamente una modificación profunda del currículo escolar, es válido incorporar pequeñas aproximaciones socioepistemológicas como actividades de mediación sincrónica o asincrónica entre estudiantes y docentes, con conceptos nuevos o estudiados previamente, la construcción social del conocimiento matemático, permite redefinir o reconstruir nociones o saberes, en particular, la argumentación del saber matemático, puede ser resignificado tanto por la persona estudiante como por la persona docente a través de una práctica social, como lo señala Montiel (2005) que la incorporación de prácticas sociales desde una actividad concreta de variación en la argumentación permitió la resignificación del saber matemático de la derivada en un grupo de profesores de matemática.

## CONCLUSIONES

La enseñanza de la matemática en la Universidad Estatal a Distancia, se encuentra demarcada por el modelo pedagógico propio de la universidad, dotando de un gran peso en los procesos de enseñanza y aprendizaje a los materiales escritos y audiovisuales que elaboran o adaptan para el aprendizaje autónomo, sin embargo, educación a distancia no es equivalente a educación en solitario, a través de las diferentes plataformas virtuales con que cuenta la universidad y diferentes espacios de comunicación que pueden entablarse, resulta pertinente, generar actividades de mediación pedagógica orientadas a alcanzar una construcción social del conocimiento a través de la problematización de los saberes matemáticos en las diferentes asignaturas de matemáticas propias de la carrera Enseñanza de la Matemática.

Estas actividades pueden considerarse en cualquier momento de un curso y debe aprovecharse los recursos tecnológicos para invitar a las personas estudiantes a participar en estos procesos colectivos que pretenden permitirles integrar la dimensión sociocultural del saber matemático en la construcción o resignificación de este, como parte de su propia formación y eventual enseñanza como futuras personas docentes. Una adecuada

construcción de la demostración como herramienta de mediación y evaluación, no impuesta sino generada a partir de las cuatro dimensiones de la teoría epistemológica, podrían permitir una mayor comprensión de los objetos matemáticos en estudio como estudiantes y que como futuras personas docentes deben reconstruir, problematizar y resignificar junto a sus estudiantes en los salones de clase.

## REFERENCIAS

- Calvillo, N. J., y Cantoral, R. (2007). Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones.
- Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 5-17.
- Cantoral, R; Reyes, D; Montiel, G. (2014). *Socioepistemología, matemáticas y realidad*. Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, 7(3), pp. 91-116.
- Crespo, C. R. C., y Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 8(3), 287-317.
- Crespo, C. (2008). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático.
- Crespo, C., Farfán, R. M., y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(3), 283-306.
- Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.
- Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la Socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 8(2), 219-325.
- Ramírez, L. (2022). Pertinencia de la demostración matemática para el estudio del análisis real en la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica. En Jerez, O & Rojas, M (Eds.), *Innovar y transformar desde las disciplinas: experiencias claves en la educación superior en América Latina y el Caribe 2021-2022*. (pp 450-458). Universidad de Chile.
- Reyes, D., y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28, 360-382.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2), 47-66.
- Universidad Estatal a Distancia (2004). Modelo pedagógico. San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.
- Universidad Estatal a Distancia (2019). Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.