Dificultades ante la resolución de demostraciones y problemas que requieren razonamiento: el caso de estudiantes en formación docente y geometría

Allan Gen Palma[1] & Eric Ricardo Padilla Mora[2]

1. Encargado de cátedra, Universidad Estatal a Distancia, Sabanilla, Costa Rica; agen@uned.ac.cr
2. Encargado de cátedra, Universidad Estatal a Distancia, Sabanilla, Costa Rica; epadilla@uned.ac.cr

ABSTRACT: This article presents the results of a qualitative and descriptive research that aimed to determine the difficulties that students, in training for mathematics teachers, of the subject Euclidean Geometry I, present when solving demonstrations and problems that require reasoning and argumentation. For the study, five items were selected from the first ordinary test of the I quarter of 2019; The researchers classified the selected exercises and made a proposal according to their level of difficulty, which was subjected to review and evaluation by experts. Furthermore, the analysis was carried out based on two tables that allowed the information to be summarized: one for the items related to manifestations. and the other by reasoning, inventiveness and argumentation.

Regarding the demonstrations, it was determined that they were able to recognize the hypotheses, definitions, postulates and theorems that allowed them to solve them, but they were not able to establish the logical inferences between them to correctly justify what was requested. Regarding the exercises that require reasoning and argumentation, it was evident that students presented greater difficulties, and that they generally used auxiliary elements that contributed little to the solution. The design and development of resources that contribute to the solution of the situations encountered is recommended, specifically, the implementation of pedagogical workshops with students is recommended.

Key words: education, teaching and training in Mathematics, vocational training, geometry, mathematical demonstration, learning difficulties.

RESUMEN: En este artículo se exponen los resultados de una investigación de tipo cualitativa y descriptiva que tuvo por objetivo determinar las dificultades que presenta el estudiantado, en formación para profesores de matemática, en la asignatura geometría euclídea I, al resolver demostraciones y problemas que requieran para su solución del razonamiento y la argumentación. Para el estudio se seleccionó cinco ítems de la primera prueba ordinaria del I cuatrimestre del 2019; los investigadores clasificaron los ejercicios seleccionados y realizaron una propuesta según su nivel de dificultad la cual se sometió a revisión y valoración por expertos, además, el análisis se realizó a partir de dos tablas que permitieran resumir la información: una para los ítems relacionados con demostraciones y la otra para los de razonamiento, inventiva y argumentación.

En cuanto a las demostraciones se logró determinar que si logran reconocer las hipótesis, definiciones, postulados y teoremas que le podrían permitir resolverlas, pero no logran establecer las inferencias lógicas entre ellas para lograr justificar de forma correcta lo solicitado. Respecto a los ejercicios que requieren razonamiento y argumentación, se logró evidenciar que los estudiantes presentan mayores dificultades, y que por lo general emplean elementos auxiliares que poco contribuyen con la solución. Se recomienda el diseño y elaboración de recursos que ayuden con la solución de las situaciones encontradas, específicamente, se recomienda la implementación de talleres pedagógicos con los estudiantes.

Palabras clave: educación, enseñanza y formación en Matemática, formación profesional, geometría, demostración matemática, dificultad en el aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

La demostración es un proceso que permite decidir la veracidad o no de una afirmación matemática dentro de un sistema axiomático, lo que la convierte en una herramienta indispensable para el desarrollo de muchas áreas, entre ellas: la geometría, el álgebra, la estadística, el análisis matemático y la teoría de los números. Además, Ortiz y Jiménez (2006) destacan que:

> En la discusión de la demostración de un enunciado matemático el alumno debe poner en práctica el correcto leguaje oral y escrito, debe a la vez ordenar cada una de sus proposiciones de una manera lógica y coherente y debe poder discernir de una manera satisfactoria la diferencia entre verdad absoluta y relativa. (p. 239)

Estas y otras características hacen que, en diversos países, sea fundamental incluirla en los procesos de enseñanza y de aprendizaje desde los primeros niveles. Por ejemplo, en Francia, Alemania y Japón, de acuerdo Cabassut et al. (2011), la demostración es considerada como un contenido explícito en la enseñanza, por lo que en el programa de estudios se plantea lo que se debe aprender, también, los libros de texto contienen capítulos enfocados a la enseñanza de la demostración. Además, indican que en Italia se trabaja de una forma implícita e informal.

Por otra parte, en Estados Unidos de Norte América, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (2003) señala que en los programas de estudio de todos los niveles educativos se debe favorecer, en los estudiantes, los procesos de razonamiento y de demostración. También, se plantea que es necesaria la implementación de actividades que permitan no solo formular conjeturas sino además investigar sobre ellas, lo cual se podría lograr a través del empleo de diferentes métodos de demostración y tipos de razonamientos.

Por su parte, en Costa Rica, de acuerdo con los Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP), tanto en la educación primaria como en la secundaria, se propone la implementación de estrategias que conlleven a razonar y a argumentar, lo cual se podría lograr mediante actividades mentales que involucran la deducción, la inducción, la comparación analítica, la generalización, las justificaciones, los ejemplos y contra ejemplos (MEP, 2012). De forma específica, respecto a la argumentación, se indica:

> … debe cultivarse de una manera gradual, primero acudiendo a formas verbales, luego escritas y más tarde simbólicas. Así mismo, se deben ir introduciendo poco a poco las formas de razonamiento por contradicción, inducción, uso de contraejemplos y las diferentes formas de la deducción. (MEP, 2012, p. 56)

Se señala, además, la necesidad de que los estudiantes se familiaricen con el sentido de la demostración en Matemáticas, para lo cual la conjetura tendrá un rol primordial, la propuesta indica:

> Se comenzará por realizar conjeturas, luego se procederá, en una primera etapa, a su verificación a través del cumplimiento en casos particulares (debe quedar completamente claro que la verificación de casos particulares hace más creíble la conjetura, pero que no demuestra la propiedad que se propone), luego se desarrollará la argumentación (en una segunda etapa) y finalmente la demostración de algunas de las conjeturas en una última etapa. (MEP, 2012, p. 318)

Lo anterior conlleva a la formación de un docente de Matemática con un conocimiento del tema de las demostraciones, que incluya comprenderlas y saber realizarlas, hasta poder diseñar estrategias de mediación que le permita impartir dicho contenido en las aulas, así como proponer actividades que potencien: la intuición, la imaginación, el conjeturar, la deducción, la inducción, la generalización y la justificación, entre otras habilidades.

Conscientes de ello, en la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica (UNED), desde la Carrera Enseñanza de la Matemática, la cual está orientada a formar docentes de dicha disciplina para laborar, principalmente, en la educación secundaria o bien impartir cursos iniciales o básicos de Matemática a nivel universitario, en el plan de estudios se contempla la demostración como una de las capacidades por alcanzar, específicamente se indica que el estudiante deberá "Demostrar propiedades y teoremas, entre otros resultados, relacionados con las diversas áreas de la matemática" (UNED, 2019, p. 94). En relación con esta capacidad se plantean algunos resultados esperados en los estudiantes, estos son:

> Dominio cognoscitivo: Analiza las demostraciones de teoremas, lemas, corolarios, así como de otros resultados propios de la Matemática.
> Dominio procedimental: Aplica las definiciones, axiomas, teoremas y algoritmos, entre otros resultados matemáticos, al realizar demostraciones.
> Dominio afectivo: Valora la importancia de las demostraciones en el contexto de la matemática, valora el proceso de descubrimiento y construcción de los conceptos matemáticos, aprecia la cognición estética de los modelos matemáticos en las distintas áreas y valora la importancia del formalismo y la rigurosidad propia de la matemática.
>
> (UNED, 2019, pp. 94-95)

Lo anterior está asociado de forma explícita con, al menos, 18 asignaturas de la malla curricular, entre ellas: geometría euclídea I, geometría euclídea II, álgebra y funciones, lógica y teoría de conjuntos, cálculo diferencial, cálculo integral, ecuaciones diferenciales, teoría de los números y álgebra moderna. Sin embargo, de acuerdo con el criterio de los encargados de estas materias y de los profesores tutores que las imparten, los estudiantes presentan diversas dificultades relacionadas con las demostraciones, dentro de las cuales destacan:

> Por lo general no comprenden las demostraciones que se brindan en los materiales didácticos y libros de texto. Esto se ha logrado evidenciar, principalmente, a partir de los comentarios realizados en las tutorías y en la atención vía teléfono, dentro de los que destacan:
> - Las demostraciones que vienen en el material no las entiendo.
> - No comprendo cómo hacen para organizar las ideas en cada uno de los pasos de esas demostraciones.
> - ¿Los ejercicios de demostraciones hay que hacerlos? Es que no se ni cómo empezarlos.
> - ¿Cómo se hace para saber cuál método es el que se debe emplear en la demostración?
> - ¿Las demostraciones entran en el examen? Es que son muy difíciles y no sé cómo hacerlas.
>
> (Encargados de cátedra y profesores tutores de la carrera enseñanza de la Matemática, comunicaciones personales, 18 de junio 2019)
>
> Además, señalan que:
> En las tareas, pruebas escritas, talleres y actividades en la plataforma, cuando los estudiantes resuelven problemas de tipo demostrativo, por lo general: no comprenden el enunciado, no logran concatenar las

> ideas de forma lógica y coherente, no los resuelven de forma correcta, los dejan incompletos, tienen errores de simbología (uso incorrecto o bien la omiten), no hay coherencia en cuanto a los argumentos que emplean, no pueden justificar de forma correcta o bien los dejan en blanco.
> Esto también sucede con aquellas situaciones, ítem o problemas en los cuales, para su solución, se requiere del empleo del razonamiento, la inventiva o bien argumentar.
> (Encargados de cátedra y profesores tutores de la carrera enseñanza de la Matemática, comunicaciones personales, 18 de junio 2019)

De manera particular estas situaciones se presentan, en la asignatura Geometría Euclídea I, según lo advierten el encargado de la catedra y los profesores tutores que la imparten, dado que han detectado que los estudiantes tienen dificultades y cometen errores al enfrentarse a las demostraciones y a los problemas en los cuales se requiere del razonamiento, la inventiva y la argumentación.

También, se logró determinar que en Geometría Euclídea I de la Carrera Enseñanza de la Matemática, no existían estudios recientes en los cuales se documenten esas dificultades, esto lleva a la reflexión y motivó el realizar un estudio que permitiera determinar ¿Cuáles son las principales dificultades y errores que presentan las y los estudiantes de la Carrera Enseñanza de la Matemática de la UNED al realizar demostraciones, y al resolver problemas que para su solución se requiera del empleo del razonamiento, la inventiva y la argumentación?

Por tanto, se propone y desarrolla un proyecto investigativo con el objetivo de determinar las dificultades y los errores que presentan los estudiantes de dicha carrera, en la asignatura geometría euclídea I, al resolver demostraciones y problemas que para su solución se requiera del razonamiento, la inventiva y la argumentación. Otras razones por las cuales se considera importante realizar el estudio en esta materia es que está en los primeros bloques de la carrera, lo cual permitirá tomar decisiones en cuanto al apoyo que se les pueda brindar desde la formación inicial y, también que en su diseño curricular se señala:

> En esta asignatura se busca que el estudiante adquiera los conocimientos básicos de la Geometría Euclídea tales como rectas, planos, figuras planas, congruencias, semejanzas y otros. Además, se pretende que logre comprender demostraciones de proposiciones y teoremas, que el estudiante mismo realice demostraciones sencillas relativas a conceptos geométricos y que a través de ellos comprenda la importancia de esta disciplina en el desarrollo de la Matemática como sistema axiomático.
>
> (UNED, 2019, p. 133)

Por tanto, se establecieron los siguientes objetivos específicos:

- Determinar las dificultades que presentan, con mayor frecuencia, los estudiantes de la asignatura geometría euclídea I ante la resolución de demostraciones.
- Determinar las dificultades y errores que presentan, con mayor frecuencia, los estudiantes de la asignatura geometría euclídea I ante la resolución de problemas en los cuales se requiere del razonamiento, la inventiva y la argumentación.
- Realizar un análisis didáctico a las soluciones propuestas por algunos de los estudiantes de la asignatura geometría euclídea I al realizar demostraciones y ante la solución de problemas en los cuales se requiere del razonamiento, la inventiva y la argumentación.

Estos los objetivos específicos del proyecto proporcionarán los insumos necesarios para la elaboración de materiales y propuestas didácticas que disminuyan las dificultades y los errores encontrados, con lo cual se pueda enriquecer el proceso de formación, se mejoraría el aprendizaje y el rendimiento académico de los estudiantes;

así como, generar espacios que contribuyan con el diseño de actividades de mediación que les orienten sobre el cómo implementar lo señalado en los Programas de Estudio de Matemática respecto a la demostración durante su ejercicio profesional y todo esto desde las primeras asignaturas de la carrera.

REFERENTES

Son diversos los investigadores que han realizado estudios sobre la demostración en Matemática, entre ellos: Fetichov (1980), Fischbein (1980), Balacheff (1987 y 2008), Godino y Recio (2001), Sanabria (2006), Hanna y De Villiers (2012), Fiallo et al. (2013) y Bailera y Oller (2017).

En cuanto a la importancia de la demostración y de su enseñanza el material propuesto por Hanna y De Villiers (2012) en el contexto de este estudio es pertinente, esto por abordar la temática desde la posición de diversos especialistas e investigadores; en el se tratan temas como: el desarrollo cognitivo de la demostración, la percepción de la demostración, los teoremas como visiones constructivas, la demostración en Educación Matemática, demostración y cognición, perspectivas históricas y educativas de la demostración, la demostración en el currículo escolar, argumentación y transición al nivel terciario, entre otros. A partir del trabajo de estos investigadores se pudo determinar que el concepto de demostración y el realizar demostraciones no se le da muy bien a los estudiantes en todos los niveles, y que por lo general estos se enfrentan a una situación problemática cuando tiene que resolver un problema que no puede ser resuelto de forma rutinaria con su conocimiento actual, lo cual es muy frecuente cuando se trata de demostraciones.

Además, lograron determinar que los estudiantes generalmente no ven ninguna razón real para desarrollar una prueba en el contexto de actividades particulares que requieren una prueba (desde un punto de vista matemático), lo cual refleja una carencia de apreciación de lo que representa y es una demostración y que tienen algunos conceptos erróneos profundamente arraigados sobre lo que significa validar afirmaciones matemáticas como, por ejemplo: las generalizaciones.

Otro aporte considerable, en el ámbito de la demostración, es el realizado por Fiallo et al. (2013), en el cual se realiza una recopilación bibliográfica de los principales proyectos relacionados con su enseñanza y su aprendizaje. De acuerdo con los investigadores, el objetivo del estudio fue aportar fuentes de consulta a la comunidad de educadores en matemáticas interesados en el tema. Esto lo hacen a partir de una estructura que incluye diversas líneas de investigación tales como: consideraciones histórico-epistemológicas, la demostración en el currículo, concepciones y dificultades de los estudiantes al demostrar, relaciones entre argumentación y demostración, y propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración.

En su indagación Fiallo et al. (2013, p. 182) lograron encontrar 14 investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en el dominio de la geometría euclidiana, varias de ellas apoyadas en el uso de programas informáticos de geometría dinámica, cinco en teoría de números, tres en álgebra y una en razonamiento probabilístico. Además, indican que en años recientes han surgido corrientes respecto a las concepciones de los profesores sobre la demostración y sus competencias en el proceso de demostrar, así como respecto al aprendizaje de la demostración visualizado como una práctica sociocultural, la cual se lleva a cabo y se condiciona por la comunidad en la que se realiza, sin embargo, concluyen que:

> … es indispensable hacer mayores esfuerzos de divulgación de la investigación sobre el tema, pues aún persisten serias dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en todos los niveles educativos, pero principalmente en la formación de maestros. Es asunto que debe atenderse de manera urgente, pues las experiencias académicas de los futuros educadores influyen de marcada manera en la importancia con la que asuman la enseñanza de la demostración en la escuela.
>
> (Fiallo et al, 2013, pp. 198-199)

En Matemática, una de las tantas áreas en la cual la demostración se convierte en una potente herramienta para comprender e interiorizar los conceptos, axiomas, teoremas y lemas es la geometría, dado que "… generalmente, esta disciplina inicia con la definición de algunos elementos básicos, se definen postulados y, a partir de ellos, se establecen argumentos que puedan validar ciertos resultados llamados teoremas…" (Padilla & Rojas, 2017, p. 8) y de acuerdo con Fetísov (1980, como se citó en Morales & Samper, 2015)

> … existe otra razón más extraordinariamente importante que condiciona la necesidad de la demostración. Se trata de que la geometría no es una colección casual de verdades que definen propiedades espaciales de los cuerpos, sino un sistema científico construido de acuerdo con leyes rigurosas. En este sistema cada teorema está relacionado orgánicamente con un conjunto de proposiciones antes establecidas y esta relación se pone de manifiesto por medio de la demostración. (pp. 56-57)

Además, es un área en la cual la visualización, la creatividad, la inventiva, el establecer conjeturas y el realizar demostraciones, entre otras habilidades, tienen un rol preponderante, no obstante, a pesar de esto, en las investigaciones desarrolladas en el contexto de la demostración y la geometría se señala que los estudiantes presentan diversas dificultades. Específicamente en el área de la geometría euclidiana, de acuerdo con los estudios de Perry et al. (2006, como se citó en Morales & Samper, 2015), y el de Morales y Samper (2015), estas pueden ser agrupadas en:

1. Dificultades al trabajar dentro de un sistema axiomático.
   - Al formular bien las definiciones.
   - Ser consciente que se deben cumplir las condiciones exigidas en las hipótesis del teorema que va a emplear.
   - Respaldar, en función del sistema teórico, cualquier afirmación que realice.
2. Dificultades con el uso de la lógica matemática como guía y sustento del razonamiento requerido para producir una justificación.
   - El estudiante, generalmente, no tiene el conocimiento conceptual y procedimental de las conectivas lógicas y de las tautologías asociadas.
   - No sabe hacer pruebas indirectas.
   - Establecer las condiciones válidas en el enunciado, incluso de las tácitas.
3. Dificultades relacionadas con los prerrequisitos de aritmética de los reales, álgebra o teoría de conjuntos.
   - Aplicar correctamente las propiedades de los números reales.
   - Empleo correcto de las relaciones de igualdad.
   - Empleo correcto de las desigualdades.
   - El uso incorrecto del principio de sustitución.

- Errores con el empleo de la sintaxis de la teoría de conjuntos en la formulación de los enunciados para hacerlos operativos.

4. Dificultades relacionadas con la comprensión y el manejo del enunciado de un teorema.
   - No comprenden el enunciado de un teorema.
   - No reconocen que es lo que se debe demostrar.
   - Expresar como proposición condicional una afirmación formulada en lenguaje natural.
   - Empleo incorrecto del lenguaje icónico propio de la geometría.

Asimismo, en el contexto de la resolución de problemas relacionados con la geometría euclidiana, el estudio realizado por Radillo (2011) permitió realizar una clasificación de los errores cometidos por los estudiantes en: de representación, deductivos o de razonamiento y axiomáticos o de aplicación de teoría y los describe como:

> (a) de representación, ya sea verbal, gráfica y/o simbólica, así como los procesos de traducción entre éstas; (b) deductivos o de razonamiento, en cuanto a la lógica seguida para solucionar un problema dado; (c) axiomáticos o de aplicación de teoría, relativos a la disponibilidad funcional de los conocimientos previos necesarios para resolver el problema. El primer tipo de error corresponde al factor lingüístico y los dos últimos a las características esenciales de la materia. (p. 2)

MARCO METODOLÓGICO

La investigación se ubica dentro del enfoque cualitativo y es de tipo descriptiva, dado que se busca determinar las dificultades y los errores que presentan, con mayor frecuencia, los estudiantes de la asignatura geometría euclídea I al realizar demostraciones y ante la resolución de problemas en los cuales se requiere del razonamiento, la inventiva y la argumentación. Además, como parte del proceso se realizó un análisis didáctico de los procedimientos efectuados por algunos de los estudiantes al enfrentarse a este tipo de situaciones. En relación al término análisis didáctico de acuerdo con Rico (2013) lo define de la siguiente manera:

> … un método de investigación propio de la Didáctica de la matemática, que se sustenta en la historia, en la propia matemática, en la filosofía del conocimiento y de la educación, que utiliza técnicas y métodos del análisis conceptual y del análisis de contenido. Son objeto del análisis didáctico aquellos conceptos, conocimientos, normas, juicios, argumentos, textos y relatos que tienen su origen en la actividad propia de la comunidad de educadores matemáticos, textos que se ajustan a su organización y que regulan su práctica. (p. 19)

Para el estudio se seleccionó la asignatura geometría euclídea I, y la primera prueba ordinaria del I cuatrimestre del 2019. Cabe señalar que es de las primeras materias en las cuales los estudiantes, que cursan el plan de estudio de la carrera Enseñanza de la Matemática, se enfrentan desde la concepción lógica formal y para la formación docente, con las demostraciones. Por lo que se pretende obtener información que permita ir trabajando en el diseño de estrategias que contribuyan a subsanar las dificultades y los errores encontrados.

Aunque la matrícula inicial en la asignatura fue de 70 estudiantes, 49 resolvieron la primera prueba ordinaria; además, procedían de diversas regiones del país, 25 son hombres y 24 mujeres, cuyas edades van de los 18 a los 52 años, con un promedio de 29 años. No obstante, dada la naturaleza del estudio se tomó una muestra al azar de 23 pruebas, que tenía la misma amplitud en edad, un promedio de 29,08 años, y eran 13 mujeres y 10 hombres.

En cuanto a la prueba escrita fue aplicada en forma presencial y los estudiantes tenían un máximo de tres horas para resolverla. Los contenidos por evaluar fueron: elementos básicos de la geometría euclidiana, ángulos y triángulos, y rectas paralelas y perpendiculares. De acuerdo con los resultados de los 49 estudiantes, en escala de 0 a 10, el promedio de las notas fue de 5,37 con una desviación de 1,96 y calificaciones, mínima de 0,6 y máxima de 9,1. En cuanto a la muestra, el promedio fue de 5,10 con una desviación de 2,27 y el mismo valor de calificaciones mínima y máxima.

Si bien la prueba estaba conformada por diez ítems, se seleccionaron los cinco que tenían relación con las temáticas por abordar en la investigación: tres de demostración y dos problemas que para su solución se requiera del empleo del razonamiento, la inventiva y la argumentación. Además, para efectos del estudio se consideró necesario clasificarlos de acuerdo con su nivel de dificultad en escala de: bajo, medio y alto, con base en los criterios propuestos por los investigadores y que se describen a continuación.

1. Nivel de dificultad bajo: situaciones o problemas en los cuales para su solución requieren el empleo de: a) definiciones y axiomas básicos de geometría, b) teoremas básicos de geometría, y c) cálculos aritméticos.
2. Nivel de dificultad medio: situaciones o problemas en los cuales para su solución requieren el empleo de: a) definiciones y axiomas básicos de geometría, b) teoremas básicos de geometría, c) establecer relaciones entre las definiciones, axiomas y los teoremas que emplea, d) interrelaciones entre diversas áreas: por ejemplo, geometría, álgebra y aritmética, y e) elementos o recursos auxiliares (por ejemplo: construcciones o dibujos), los cuales no son indispensables.
3. Nivel de dificultad alto: situaciones o problemas en los cuales para su solución requieren el empleo de: a) definiciones y axiomas básicos de geometría, b) teoremas básicos de geometría, c) establecer relaciones entre las definiciones, axiomas y los teoremas que emplea, d) interrelaciones entre diversas áreas: por ejemplo, geometría, álgebra y aritmética, y e) elementos o recursos auxiliares (por ejemplo: construcciones o dibujos) y es indispensable.

A partir de esta propuesta los investigadores clasificaron los ejercicios seleccionados, y la sometieron a revisión y valoración por cinco expertos en enseñanza de la Matemática, quienes en su momento realizaron observaciones y mejoras. En la tabla 1 se muestra la clasificación de los ítems según nivel.

Tabla 1

Clasificación de los ítems según nivel de dificultad

Nivel		**Enunciado**
Bajo	Respuesta breve Ítem 2	Sean $A-B-C$ y $D-H-E$ tales que $AB=DH$ y $BC=HE$. Demuestre que $AC=DE$.
	Respuesta breve Ítem 3	Considere $a, c, b \in \mathbb{R}$, $a<c<b$ asociados respectivamente a los puntos colineales A, C y B. Si $a=2$ y $b=48$, utilice la definición de punto medio para determinar la coordenada del punto C tal que $AC=\frac{7}{8}AB$.
	Respuesta breve Ítem 7	Demuestre que los ángulos iguales de un triángulo isósceles son agudos.
Medio	Respuesta breve Ítem 1	Los puntos A, B, P y C que se encuentran en una línea recta de modo que P es el punto medio del segmento BC, además:

		$AB^2 + AC^2 = 46$ Hallar $AP^2 + BP^2$.
Alto	Desarrollo Ítem 1	Demuestre que si l es una recta y A es un punto que no pertenece a ella, existe un plano único que contiene a la recta y al plano.

Fuente: elaboración propia con base en la prueba escrita aplicada (2019).

Además, para el análisis de cada uno de los ítems y tomando como referencia las dificultades que se señalaron en el referente teórico, se construyeron dos tablas que permitieran resumir la información de las 23 pruebas escritas. La primera sería utilizada para analizar los ítems relacionados con demostraciones, mientras que la otra estaría diseñada para el análisis de los relacionados con razonamiento, inventiva y argumentación, ambas se muestran en el siguiente apartado de discusión de resultados con el nombre de tabla 2 y tabla 3 respectivamente.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El análisis se fundamentó en los datos obtenidos en cada una de las tablas y, además, se estudiará el proceso realizado por los estudiantes al resolver alguno de los ítems, el cual permitirá ampliar y profundizar sobre algún dato o aspecto específico, con el objetivo de intentar comprender qué es lo que ha realizado.

Respecto a los ítems de demostración

En la tabla 2 se muestran los criterios por analizar y los resultados obtenidos para cada uno de ellos.

Tabla 2

Información obtenida respecto a los ítems relacionados con demostración.

Criterio	R.B. 2	R.B. 7	D. 1
Emplea elementos auxiliares al resolver la demostración.	14	14	16
Los elementos auxiliares que emplea están relacionados con lo que debe demostrar.	10	13	16
Traduce de forma correcta el lenguaje matemático.	19	15	18
Se evidencia que reconoce las hipótesis de la demostración.	20	16	23
Separa o enuncia las hipótesis en la demostración.	19	12	14
Se evidencia que comprende lo que se debe demostrar.	19	14	12
Logra determinar las definiciones y axiomas que le permitirán resolver la demostración.	18	14	19
Logra interrelacionar las definiciones y axiomas en la propuesta de demostración.	18	14	15
Logra determinar los teoremas que le permitirán realizar la demostración.	18	15	15
Logra interrelacionar los teoremas en el proceso de demostración.	18	14	15
Verifica que se cumplen las condiciones exigidas en las hipótesis del teorema que va a emplear.	18	13	14
Justifica correctamente cada uno de los procesos realizados.	18	13	12
Emplea de forma correcta el lenguaje simbólico e icónico propio de la geometría.	19	13	15
Las conclusiones que establece son correctas.	18	13	11
Logra demostrar lo solicitado.	18	13	9

Nota: se utiliza la simbología R.B. para referirse a los de respuesta breve y D para el de desarrollo.

Fuente: elaboración propia con base en referentes teóricos y datos de las pruebas escritas (2019).

De acuerdo con los datos en la tabla, se puede afirmar que el ítem R.B. 2 no presentó dificultad para los estudiantes, pero el R.B. 7 y el de desarrollo sí. En los dos que tuvieron dificultades se destacan aspectos como: se les dificulta separar o enunciar las hipótesis y no comprenden lo que se debe demostrar, si bien en algunos casos reconocen las definiciones, axiomas y teoremas que podrían emplear en la demostración no logran establecer las relaciones de forma coherente y lógica, no justifican correctamente cada uno de los procesos realizados, realizan inferencias y conclusiones que no son correctas y en el caso de la demostración D. 1, 60,8% de la muestra no logra demostrar lo solicitado.

En los ejemplos 1 y 2 se muestra y analiza lo realizado por dos de los estudiantes de la muestra respecto a los ítems R. B. 7 y D. 1.

Ejemplo 1

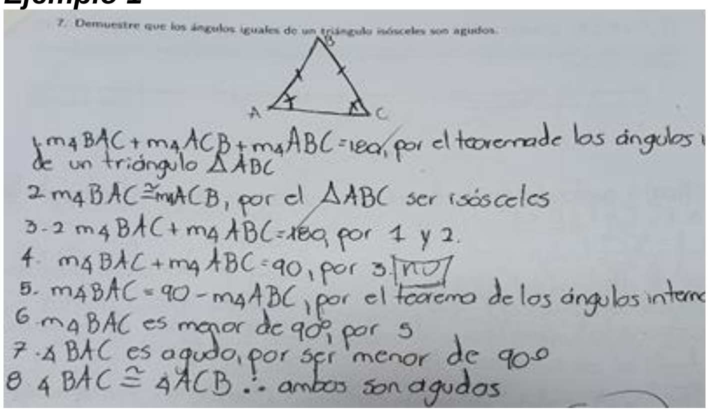

Figura 1. Propuesta de solución del ítem R.B. 7 por el estudiante A, 2019.

Análisis didáctico: en este caso el estudiante emplea una figura auxiliar (destacamos que es la figura clásica que emplean los estudiantes para referirse a un triángulo isósceles), logra plantear las hipótesis y teoremas que le permiten resolverlo, pero olvida colocar el símbolo de grados en los pasos 1, 4 y 5 aunque sí lo coloca en los pasos 6 y 7. Además, llega a una conclusión incorrecta en el paso numerado por él como 4 producto de un error de despeje, dado que pasa el 2 que aparece al inicio del paso 3 a dividir a 180°. La argumentación en el paso 5 no es correcta.

Ejemplo 2

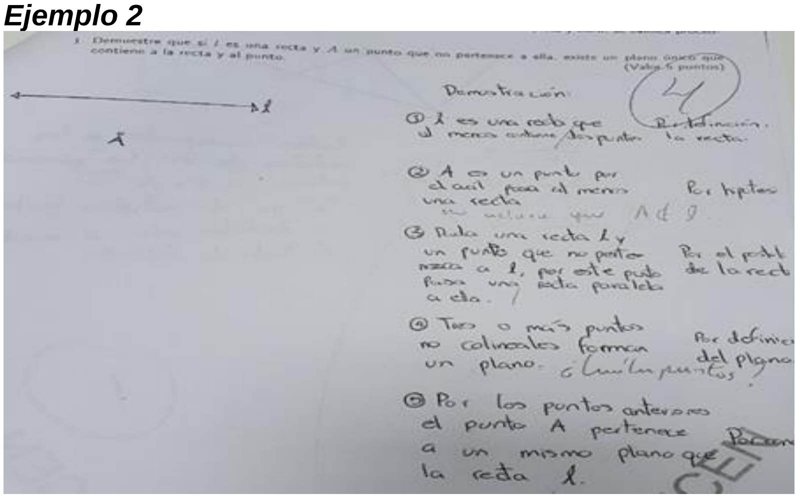

Figura 2. Propuesta de solución del ejercicio D. 1 por el estudiante B, 2019.

Análisis didáctico: el estudiante B recurre a una figura auxiliar pero no la aprovecha al máximo, escribe las hipótesis, algunas definiciones y postulados que al justificar de forma lógica le permitirán resolver el problema, pero no lo hace en el paso 4 si bien es correcto lo que indica, no lo concatena con las ideas que viene trabajando ni con la figura auxiliar. No trabaja aspectos sobre la unicidad.

Dos aspectos por destacar para estos dos ítems es que, si bien la mayoría de los estudiantes reconocen las hipótesis, las definiciones, postulados y teoremas que podrían emplear en la solución, tienen dificultad para establecer las relaciones entre ellos, así como argumentar de forma correcta, concatenar las ideas de forma lógica y lograr realizar la demostración. También, se logró determinar que si en el enunciado contiene solo texto tienen problemas para comprender lo que deben demostrar, pero si este presenta alguna simbología esto les favorece, tal como se logró evidenciar con el ejercicio R. B. 2.

Respecto a los problemas relacionados con razonamiento, inventiva y cálculo numérico.

En la tabla 3 se muestran los criterios por analizar para los dos ítems, así como los resultados obtenidos.

Tabla 3

Información obtenida respecto a los ítems relacionados con razonamiento, inventiva y cálculo numérico.

Criterio	**R.B. 1**	**R.B. 3**
Emplea elementos auxiliares para resolver el ejercicio.	17	18
Los elementos auxiliares que emplea podrían contribuir con la solución.	14	11
Se evidencia que comprende lo que debe resolver.	5	12
Logra determinar las definiciones y axiomas que le permitirán resolver el ejercicio.	11	0
Logra interrelacionar las definiciones y axiomas en la resolución del ejercicio.	4	0
Las sustituciones que realiza son correctas.	5	4
Los cálculos realizados contribuyen con la solución del ejercicio.	3	4
Los cálculos realizados están correctos.	3	5
Los procedimientos que emplea son matemáticamente correctos.	3	3
Hace uso correcto de la simbología en el proceso de solución.	4	7
Logra resolver el ejercicio correctamente.	1	3

Nota: se utiliza la simbología R.B. para referirse a los ítems de respuesta breve.

Fuente: elaboración propia con base en referentes teóricos y datos de las pruebas escritas (2019).

En la tabla 3 se destaca que en ambos ítems la mayoría de los estudiantes emplean elementos auxiliares, y de acuerdo con lo que realizan se infiere que hacen una correcta interpretación geométrica del enunciado, por ejemplo: representan un segmento o bien una recta, asignan un orden apropiado a los puntos y respectan el orden de colinealidad. En el caso del R.B. 1 intentan que visualmente que se aprecie P como el punto medio del segmento BC, sin embargo, no tienen claro ni comprenden qué es lo que deben resolver. Aunque este ítem fue clasificado de dificultad media únicamente 4,3% de la muestra logró resolverlo correctamente.

Además, en ambas situaciones, los estudiantes, no logran interrelacionar las definiciones y axiomas que deben utilizar, los cálculos realizados no contribuyen con la solución de la situación planteada o bien no son correctos, los procedimientos que emplea no son matemáticamente correctos ni el uso que hacen de la simbología en el proceso de solución.

A continuación, se muestran dos ejemplos de lo realizado por los estudiantes en el R.B. 1 junto con el análisis respectivo.

Ejemplo 4

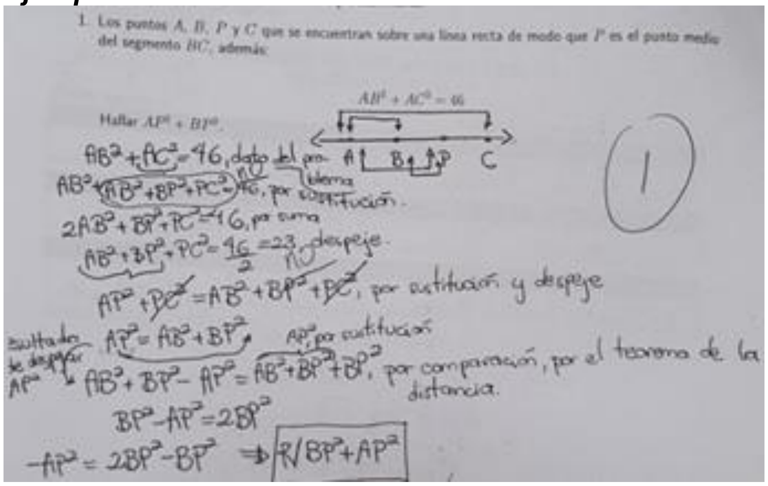

Figura 4. Propuesta de solución del ítem R.B. 1 por el estudiante C, 2019.

Análisis didáctico: se emplean elementos auxiliares y estos satisfacen las condiciones del enunciado; no obstante, asume relaciones de igualdad que no son correctas, por ejemplo, si bien $AC = AB + BP + PC$ no es correcto que $AC^2 = AB^2 + BP^2 + PC^2$, y es sobre lo que trabaja en la solución. Para este ítem solo 21,7% de la muestra hace sustituciones correctas.

Ejemplo 5

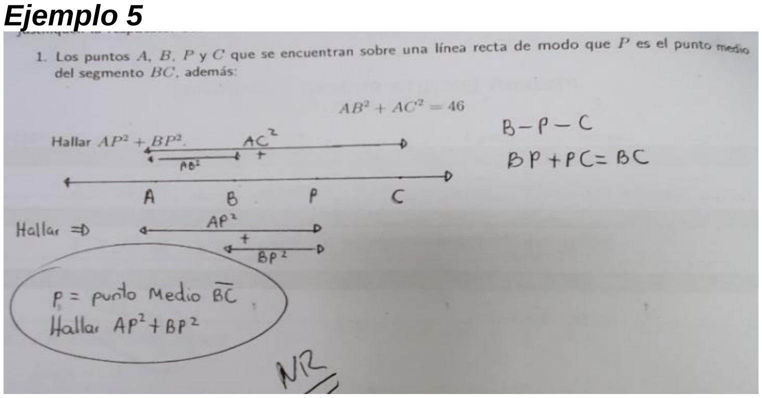

Figura 5. Propuesta de solución del ítem R.B. 1 por el estudiante D, 2019.

Análisis didáctico: en este caso el estudiante emplea varios elementos auxiliares, algunos de ellos cumplen con las condiciones que se dan en el enunciado, no obstante, realiza marcas y anotaciones auxiliares, que no son correctas; por ejemplo, sobre los segmentos AB y AC efectúa una "traslación" de estos y manteniendo la misma longitud les asigna por medida AB^2 y AC^2 respectivamente, esto permite inferir que confunde el concepto de segmento con el de longitud de segmento. De acuerdo con la figura, se concluye que no tiene conocimiento de cómo resolver el ejercicio. Otro detalle importante para este ítem es que, por lo general, no emplean la simbología de forma correcta, además, el símbolo "=" o bien el de implica, en la mayoría de los casos, los omiten.

En cuanto al problema R.B. 3 aunque un alto porcentaje de la muestra emplea elementos auxiliares, en algunos casos no están relacionados con lo que se debe demostrar, el porcentaje de los que lograron resolverlo correctamente aumentó respecto al R.B. 1 se considera que para el R.B. 3 tampoco es tan satisfactorio. Un ejemplo de lo realizado por los estudiantes se muestra a continuación.

Ejemplo 6

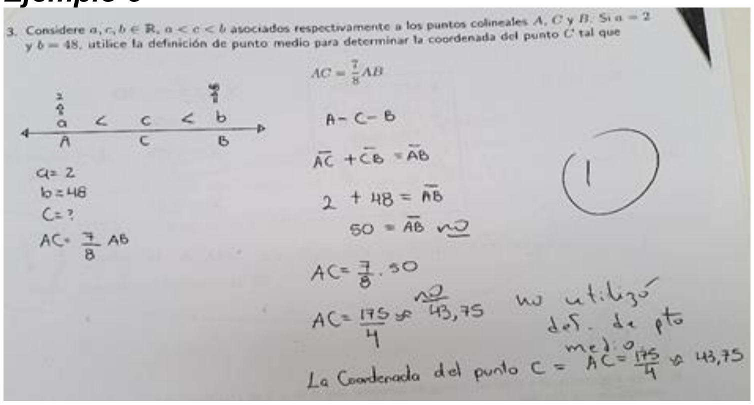

Figura 6. Propuesta de solución del ítem R.B. 3 por el estudiante E, 2019.

Análisis didáctico: en este caso el estudiante emplea elementos auxiliares, no obstante, coloca el punto C como si fuera el punto medio del segmento AB, lo cual es incorrecto, dado que $AC = \frac{7}{8}AB$, esta situación también se pudo apreciar en otras de las pruebas de la muestra. Además, en este caso para determinar la distancia de AB, lo que hace es considerar que $2 + 48 = \overline{AB}$ lo cual es incorrecto. Debe considerarse que no se emplea la definición de punto medio, y es una de las condiciones que se indican en el enunciado.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En cuanto a las situaciones relacionadas con demostraciones se logró determinar que los estudiantes tienen dificultades para resolverlas, sobre todo si el enunciado no contiene simbología. Aunque logran reconocer las hipótesis, definiciones, postulados y teoremas que le podrían permitir resolver la demostración, no consiguen establecer las inferencias lógicas entre ellos para lograr justificar de forma correcta lo solicitado, esto coincide con lo que habían señalado los profesores que imparten dicha asignatura y lo establecido en los referentes, específicamente, a la dificultad con el uso de la lógica matemática como guía o sustento del razonamiento requerido para producir una justificación.

Además, se logró determinar que en algunos casos no emplean de forma correcta el lenguaje simbólico e icónico propio de la geometría. Si bien esto no fue en toda la muestra es un aspecto que deberá trabajarse aún más en los diversos materiales, recursos y espacios de interacción que se brindan desde la cátedra y la universidad.

Respecto a los ejercicios relacionados con razonamiento, inventiva y argumentación se puede destacar que si bien emplean elementos auxiliares por lo general al pasar los datos a la figura los colocan de forma arbitraria sin hacer ninguna reflexión sobre dicha información, y por lo general no comprenden lo que deben resolver, además, se les dificulta determinar qué es lo que podrían emplear para solucionar el problema, así como establecer las inferencias y conexiones lógicas para justificar los pasos. Tienen errores de prerrequisitos como: aplicar correctamente propiedades de los números reales y las relaciones de igualdad, hacen uso incorrecto de la simbología propia de la geometría como del álgebra, por ejemplo, omiten los símbolos de igual y de implicación o bien los emplean de forma incorrecta. Se determinó que en este tipo de ítem los estudiantes tuvieron más dificultades lo cual conllevó a que no los logran resolver de forma correcta.

Es importante investigar y trabajar sobre el diseño de estrategias que contribuyan con la inserción de la demostración en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, principalmente, a partir de la generación de interrogantes, motivando la argumentación, el planteamiento de problemas y generación de desafíos tanto de la Matemática como de otras disciplinas, de manera tal que sea un proceso orientado y gradual, hasta llegar a que los estudiantes puedan enfrentarse a las mismas.

Para el caso de los futuros estudiantes de la asignatura geometría euclídea I, en la Universidad Estatal a Distancia, es necesaria la implementación de actividades que le permitan ir fortaleciendo las habilidades propias del acto de demostrar y del empleo del razonamiento, inventiva y argumentación. Se considera oportuno ofrecerles espacios como talleres en los cuales se oriente y trabaje el proceso de resolución de situaciones que requieran de análisis, donde el justificar y argumentar sea fundamental, lo cual podría ser una posible estrategia a emplear por ellos durante su ejercicio profesional.

Se recomienda continuar con el desarrollo de estos trabajos de investigación en otras asignaturas de manera que se puedan determinar cuáles son las principales dificultades que tienen los estudiantes, y así diseñar estrategias de solución de forma muy puntual y acorde a las necesidades y particularidades de cada una.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. [Processes of proof and situations of validation]. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176. https://www.researchgate.net/publication/320518071_Processus_de_preuve_et_situations_de_validation

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 501-512. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01675739/document

Bailera, A. & Oller, A. (2017). Formación del Profesorado y Demostración Matemática. Estudio Exploratorio e Implicaciones. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 31(57), 135-157. https://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0135.pdf

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. & Morselli, F. (2011). Conceptions of proof– In research and teaching. En Proof and proving in mathematics education (pp. 169-190). Dordrecht: Springer. Doi: ht-tps://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7

Fiallo, J., Camargo, A. & Gutiérrez, A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander*, 31(2), 181–205. http://www.scielo.org.co/pdf/rein/v31n2/v31n2a07.pdf

Fischbein, E. (1980). Intuition and Proof. 4th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education at Berkeley. https://flm-journal.org/Articles/3C2FDFF14268CD1E813E785AD584E4.pdf

Godino, J. & Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*, 19(3), 405-414. https://core.ac.uk/download/pdf/38990678.pdf

Hanna, G. & De Villier, M., (2012). Proof and proving in Mathematics Education. https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/48201/1/9789400721296.pdf#page=25

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. San José: Ministerio de Educación Pública. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Morales, S. & Samper, C. (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea. *AMAZONIA Investiga,* 4(6). 55-68. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjG1rScssbsAhXBxVkKHSKtCcEQFjAAegQIAxAC&url=https%3A%2F%2Famazoniainvestiga.info%2Findex.php%2Famazonia%2Farticle%2Fdownload%2F685%2F645%2F&usg=AOvVaw0CQri6wLLsVccTcw-VmPz-

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Thales. Sevilla, España.

Ortiz, H. & Jiménez, F. (2006). La demostración elemento vivo en la didáctica de la Matemática. *Scientia et Technica*, 31, 237-240. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4830598.pdf

Padilla, E. & Rojas, E. (2017). Geometría Euclídea y su didáctica en educación primaria. Editorial: EUNED. ISBN: 978-9968-48-336-0.

Radillo, M. (2011). *Obstáculos y errores en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en el nivel licenciatura*. http://funes.uniandes.edu.co/4835/1/RadilloObstaculosALME2011.pdf

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf

Sanabria, G. (2006). Propuesta sobre la enseñanza de la demostración de implicaciones. *Revista Digital Matemática Educación e Internet*. 1-14. https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/propuestas-didacticas-em/v7n1-jun2006/

Universidad Estatal a Distancia, UNED. (2019). *Bachillerato y licenciatura en enseñanza de la Matemática*. Manuscrito no publicado.