

Conocimiento manifestado por profesores de Matemática en formación inicial sobre el significado clásico de probabilidad al resolver tareas

Knowledge demonstrated by pre-service mathematics teachers regarding the classical definition of probability when solving tasks

Conhecimento manifestado por professores de Matemática em formação inicial sobre o significado clássico da probabilidade na resolução de tarefas

Jesús Cruz Quesada

Universidad Nacional

 <https://ror.org/01t466c14>

Heredia, Costa Rica

jesuscruzquesada5@gmail.com

 ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-9324-6236>

Recibido – Received – Recebido: 01/09/2025

Corregido – Revised – Revisado: 26/11/2025

Aceptado – Accepted – Aprovado: 17/01/2026

DOI: <https://doi.org/10.22458/ie.v28i45.6021>

URL: <https://revistas.uned.ac.cr/index.php/innovaciones/article/view/6021>

Resumen: El conocimiento especializado del profesorado de Matemática en formación inicial es clave para una enseñanza efectiva de la probabilidad. Por lo que este estudio cualitativo, realizado con 13 estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, tuvo como propósito describir el conocimiento que evidencian sobre la definición clásica de probabilidad al resolver seis tareas contextualizadas. Se adoptó el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), con énfasis en el subdominio Knowledge of Topics (KoT), para operacionalizar cuatro categorías: definiciones y fundamentos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones, así como procedimientos. Se elaboraron indicadores validados por expertos y aplicados mediante análisis de contenido. Los resultados muestran que la mayoría moviliza distintos registros de representación y aplica la regla de Laplace en situaciones equiprobables, pero pocos integran de forma simultánea los tres elementos esenciales de la definición clásica (cociente, equiprobabilidad y finitud), lo que limita la argumentación en contextos no equiprobables. Debido a esto, se recomienda reforzar en la formación inicial las conexiones entre definición, fenomenología y justificación.

Palabras claves: formación de profesores, enseñanza, probabilidad, conocimiento, enseñanza superior.

Abstract: The specialized knowledge of pre-service mathematics teachers is key to effective probability instruction. Accordingly, this qualitative study, conducted among 13 students from the Mathematics Teaching program at the *Universidad Nacional de Costa Rica*, aimed to describe the knowledge they demonstrate regarding the classical definition of probability when solving six contextualized tasks.

CRUZ-QUESADA

The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model was adopted, with an emphasis on the Knowledge of Topics (KoT) subdomain, to operationalize four categories: definitions and foundations, representation registers, phenomenology and applications, and procedures. Expert-validated indicators were developed and applied through content analysis. The results show that most participants draw on different representation registers and apply Laplace's rule in equiprobable situations; however, few simultaneously integrate the three essential elements of the classical definition (ratio, equiprobability, and finiteness), which limits their argumentation in non-equiprobable contexts. Based on these findings, it is recommended that initial teacher training strengthen the connections between definition, phenomenology, and justification.

Keywords: teacher education, teaching, probability, knowledge, higher education.

Resumo: O conhecimento especializado de professores de Matemática em formação inicial é fundamental para o ensino eficaz da probabilidade. Assim, este estudo qualitativo, realizado com 13 estudantes do curso de Ensino de Matemática da Universidade Nacional da Costa Rica, teve como objetivo descrever o conhecimento que eles evidenciam sobre a definição clássica de probabilidade ao resolver seis tarefas contextualizadas. Foi adotado o modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), com ênfase no subdomínio Knowledge of Topics (KoT), para operacionalizar quatro categorias: definições e fundamentos, registros de representação, fenomenologia e aplicações, bem como procedimentos. Foram elaborados indicadores validados por especialistas e aplicados por meio da análise de conteúdo. Os resultados mostram que a maioria mobiliza diferentes registros de representação e aplica a regra de Laplace em situações equiprováveis, mas poucos integram simultaneamente os três elementos essenciais da definição clássica (quociente, equiprobabilidade e finitude), o que limita a argumentação em contextos não equiprováveis. Por esse motivo, recomenda-se reforçar, na formação inicial, as conexões entre definição, fenomenologia e justificação.

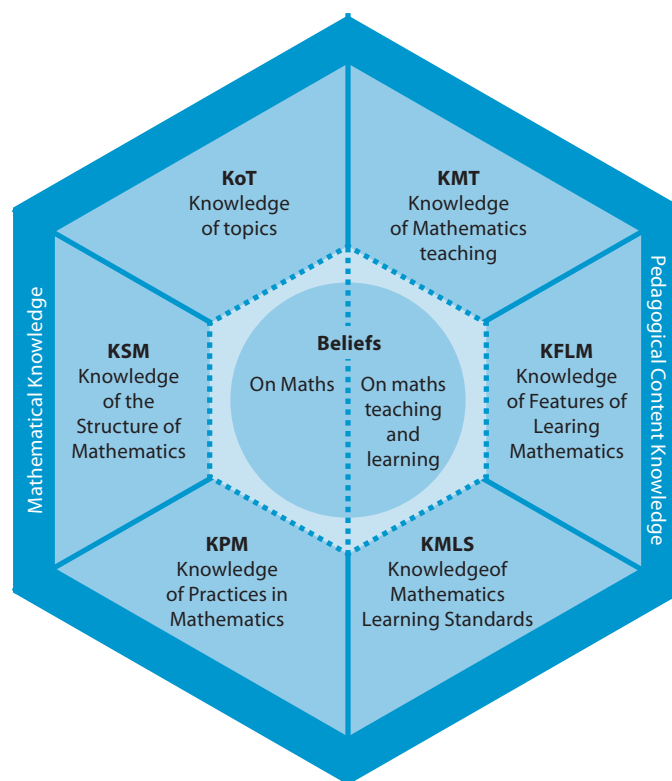
Palavras-chave: formação de professores, ensino, probabilidade, conhecimento, ensino superior.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento especializado del profesorado de Matemática ha generado gran interés en la comunidad científica en educación matemática, debido al papel fundamental que desempeña la persona docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Hill et al. (2007) señalan que una de sus funciones esenciales es implementar una enseñanza efectiva que facilite la construcción de nuevos conocimientos en las personas estudiantes. En esta línea, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) resalta la importancia de que las personas docentes cuenten con un conocimiento sólido y una comprensión profunda del contenido matemático que enseñan, así como la capacidad de aplicarlo de manera efectiva en su práctica pedagógica. Diversos autores coinciden en que la labor docente implica mucho más que dominar el contenido; se requiere un conocimiento especializado, complejo y multidimensional, que integra saberes didácticos, disciplinares, curriculares, así como aquellos relacionados con el aprendizaje y el contexto educativo (Ball et al., 2008).

Desde la década de 1980, el conocimiento de la persona docente ha sido objeto de estudio en el ámbito educativo. Uno de los principales referentes en esta línea es Shulman (1986), cuyo trabajo representó un punto de inflexión en la conceptualización del conocimiento profesional del profesorado. En este marco, surge el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) de Carrillo et al. (2018), el cual ofrece una estructura teórica para comprender este tipo de conocimiento, organizado en dos dominios y varios subdominios. La Figura 1 muestra el modelo MTSK, compuesto por dos dominios principales y seis subdominios articulados por las creencias del docente.

Figura 1.
Modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge



Nota: Carrillo et al. (2018).

Esta investigación se enfocó en el subdominio del KoT, el cual comprende cuatro categorías: (1) definiciones, propiedades y fundamentos; (2) registros de representación, (3) fenomenología y aplicaciones; y (4) procedimientos.

Carrillo et al. (2018) señalan que la categoría de definiciones, propiedades y fundamentos implica el conocimiento que la persona docente moviliza para definir conceptos y justificar propiedades fundamentales. En el caso de la probabilidad clásica, Batanero et al. (2016) la definen como una división entre casos favorables y posibles bajo la condición de equiprobabilidad, es decir, implica asignar una probabilidad de $\frac{1}{n}$ a cada punto muestral, donde n representa el total de puntos muestrales. De esta definición se derivan propiedades esenciales, como que un evento seguro tiene probabilidad 1 y uno imposible, probabilidad 0; propiedades que, según Liñán et al. (2016), pueden evidenciarse mediante simulaciones o ejemplos.

En cuanto a los registros de representación, Carrillo et al. (2018) destacan que la persona docente debe manejar diversas formas de representación matemática. En probabilidad clásica, la fracción puede expresarse como decimal, porcentaje o de forma algebraica. Beltrán-Pellicer et al. (2018) mencionan representaciones como diagramas de árbol, tablas, duplas o tripletas, y Batanero (2001) resalta su utilidad para interpretar experimentos y contar casos favorables.

Respecto a la fenomenología y aplicaciones, Carrillo et al. (2018) indican que el conocimiento de la persona docente debe incluir los contextos en los que surge un concepto. En la probabilidad, Batanero et al. (2016) vinculan su origen a los juegos de azar, donde se buscaba distribuir equitativamente las apuestas. Esta base ha generado críticas sobre la definición clásica por su circularidad, al asumir la equiprobabilidad desde el inicio (Skorokhod, 2004; Batanero y Díaz, 2007).

Finalmente, en relación con los procedimientos, Carrillo et al. (2018) plantean que la persona docente debe conocer cómo, cuándo y por qué aplicar un procedimiento, así como interpretar su resultado. En probabilidad clásica, esto implica calcular la fracción entre casos favorables y posibles (cuando son equiprobables), y expresar el resultado como un número entre 0 y 1, utilizando distintos registros para contar adecuadamente.

El conocimiento especializado de la persona docente en probabilidad ha sido ampliamente estudiado, revelando deficiencias en aspectos conceptuales y en el razonamiento en probabilidad, como el sesgo de equiprobabilidad y el uso excesivo de procedimientos sin argumentación (Batanero et al., 2016; Bastias et al., 2017; Cardeñoso et al., 2017; Gea et al., 2017; Rodríguez-Alveal et al., 2018; Gravir, 2019; Hourigan y Leavy, 2020; Abu-Ghalyoun, 2021; Alonso-Castaño et al., 2021; Batanero et al., 2022). En consecuencia, la enseñanza de la probabilidad ocupa un lugar fundamental en los programas de Matemática, debido a su utilidad para abordar situaciones de incertidumbre, lo que impulsa una alfabetización probabilística orientada al pensamiento crítico y la toma de decisiones (Batanero, 2004; 2006; Gal, 2002; Zieffler et al., 2018; Wild et al., 2018; Pfannkuch et al., 2016; Lehrer y English, 2018; Ingram, 2022; Batanero Bernabéu y Álvarez Arroyo, 2023). En este contexto, la definición clásica, entendida como la fracción entre casos favorables y posibles, sigue siendo un punto de partida fundamental en la enseñanza.

En Costa Rica, los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP (2012) incorporan la probabilidad desde primaria hasta secundaria, incluyendo las nociones subjetiva, clásica y frecuencial. La definición clásica se introduce de forma explícita en sexto año de primaria, segundo y cuarto año de secundaria, y de manera implícita en tercer año mediante el enfoque frecuencial. El programa busca desarrollar habilidades como identificar puntos muestrales, deducir propiedades, aplicar la regla de Laplace y resolver problemas. Para lograr una enseñanza efectiva de la probabilidad, es fundamental que las personas docentes estén bien preparadas, con una formación que fortalezca tanto el conocimiento del contenido como el didáctico (Brase et al., 2014; Huerta, 2018; Batanero et al., 2016; Batanero y Chernoff, 2018; Ingram, 2022).

La Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) cumple un rol fundamental en la formación de personas docentes de Matemática, brindando una preparación integral que abarca aspectos teóricos, didácticos, tecnológicos e investigativos. El Plan de Estudios de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las Matemáticas (BLEM-2017) fomenta el desarrollo del conocimiento en probabilidad y estadística mediante tres cursos, aunque solo dos de ellos incluyen explícitamente la noción clásica de probabilidad (Universidad Nacional, 2017).

Ante lo expuesto, resulta esencial que las personas docentes en formación adquieran una comprensión sólida de la noción clásica de probabilidad, tanto por su presencia en el currículo como por su relación con el conocimiento especializado docente. Debido a ello, este estudio tuvo como objetivo general caracterizar el conocimiento matemático evidenciado por personas docentes en formación de la UNA, al resolver tareas sobre probabilidad clásica. Se plantearon como objetivos específicos: (1) analizar las definiciones, propiedades y sus fundamentos de las personas participantes en relación con la noción clásica de probabilidad; (2) clasificar los registros de representación movilizados en la resolución de tareas de probabilidad; (3) describir las aplicaciones de la probabilidad en los contextos propuestos; (4) describir los procedimientos utilizados por el profesorado al abordar dichas tareas.

MATERIALES Y MÉTODOS

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo y tiene un alcance descriptivo. La metodología se desarrolló mediante tres fases.

La primera fase correspondió a la operacionalización de las categorías de análisis del KoT. El estudio inició con una revisión de investigaciones sobre el conocimiento del profesorado de Matemática, junto con los Programas del MEP (2012) y el plan de estudios BLEM-2017 (UNA, 2017). A partir de esta revisión, se definieron y ajustaron indicadores para operacionalizar las categorías del modelo KoT, los cuales, según Alfaro et al. (2020), permiten identificar evidencias de conocimiento en las respuestas de las personas participantes. La Tabla 1 muestra los indicadores definidos para cada categoría.

Tabla 1.*Indicadores de conocimiento generados para las categorías del KoT*

Categorías	Indicadores de conocimiento
Definiciones, propiedades y sus fundamentos	1. Define el significado clásico de probabilidad como el cociente entre la cantidad de casos favorables y el número total de casos posibles. 2. Menciona la equiprobabilidad al dar la definición clásica de probabilidad. 3. Establece que el espacio muestral debe ser finito al dar una definición clásica de probabilidad. 4. Determina un evento seguro a partir de las características del experimento aleatorio. 5. Determina un evento imposible a partir de las características del experimento aleatorio. 6. Deduce la propiedad de un evento seguro empleando la definición clásica de probabilidad. 7. Deduce la propiedad de un evento imposible empleando la definición clásica de probabilidad.
Registros de representación	1. Emplea una representación fraccionaria, decimal, porcentual, verbal o algebraica para indicar la probabilidad de un evento. 2. Muestra de forma completa todos los puntos muestrales que corresponden a un experimento aleatorio. 3. Utiliza, como mínimo, dos métodos distintos para representar la totalidad de los puntos muestrales de un experimento. 4. Analiza los puntos muestrales del experimento considerando el tipo de representación empleada.
Fenomenología y aplicaciones	1. Determina situaciones en las que cada punto muestral del experimento tenga la misma probabilidad de ocurrir.
Procedimientos	1. Identifica las condiciones necesarias para la aplicación de la definición clásica en el cálculo de probabilidades. 2. Emplea el método de dividir el número de casos favorables entre el total de casos posibles para determinar la probabilidad de un evento. 3. Reconoce las características del resultado obtenido al calcular la probabilidad de un suceso aleatorio. 4. Implementa estrategias o métodos alternativos para determinar la probabilidad de un evento.

Nota: Elaboración propia, con información basada en Carrillo et al. (2018); Liñán et al. (2016), Vasco et al. (2017) y Zakaryan y Ribeiro (2019).

En la segunda fase, se construyó y validó el instrumento. En esta etapa, se creó un instrumento de recolección de datos para identificar evidencias de conocimiento sobre probabilidad clásica, mediante un cuestionario de seis tareas abiertas alineadas con el contexto del MEP, el BLEM-2017 y la categoría KoT del modelo MTSK.

Dicho instrumento, junto con los indicadores de conocimiento elaborados en la fase anterior, fue validado mediante el juicio de seis expertos provenientes de universidades de España, Chile y Costa Rica. A cada persona evaluadora, se le entregó un resumen del proyecto, la propuesta del cuestionario y una guía de validación con observaciones generales y específicas, elaborada con base en el método de validez de contenido propuesto por Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008). Este proceso, sustentado en una escala tipo Likert, permitió valorar la pertinencia del instrumento, la claridad de los ítems, la coherencia entre las tareas y los indicadores, así como su alineación con los objetivos del estudio. Además, algunas personas expertas resolvieron el cuestionario, lo que aportó evidencia preliminar que facilitó la revisión y el ajuste de las tareas e indicadores.

Posteriormente, se realizó un pilotaje con 16 estudiantes de cuarto año del plan BLEM-2017, en un curso de Didáctica de la Estadística y la Probabilidad. Esta aplicación piloto permitió aplicar por primera vez los indicadores, clasificando las evidencias de conocimiento según las categorías del subdominio del KoT. Una descripción detallada de este proceso puede consultarse en Cruz et al. (2021).

La fase final corresponde al estudio empírico y al análisis de la información. Una vez validado el instrumento, este fue aplicado a 13 estudiantes del primer año de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la UNA, todos con el grado académico de Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática. Las personas participantes, con

edades entre 21 y 28 años, habían realizado su práctica profesional y culminado su formación en probabilidad, por lo que se encontraban habilitadas para ejercer la docencia.

La población analizada correspondió a la totalidad de estudiantes matriculados en el primer año de la Licenciatura, lo que justifica su selección para el estudio. La aplicación se realizó de forma remota mediante Zoom. Por su parte, las respuestas fueron codificadas por persona participante y tarea, además, se registró la presencia (1) o ausencia (0) de cada indicador. Para el análisis de la información se utilizó la técnica de análisis de contenido (Cohen et al., 2007), la cual permite sistematizar respuestas abiertas mediante procesos de codificación, categorización y comparación, con el fin de identificar patrones en el contenido.

De acuerdo con Cohen et al. (2007), este proceso permite extraer conclusiones teóricas de las unidades de análisis y, en este caso, con respecto al KoT. Para este estudio, las personas participantes fueron identificadas mediante la notación P seguida del número de participante (1–13), en la Figura 2 se ejemplifica la respuesta del participante P11 (participante 11).

Figura 2.

Explicación del análisis realizado en la respuesta de P11

Tarea 2. ¿Qué es para usted la noción clásica de probabilidad? Para dar respuesta a esta pregunta enuncie una posible definición sobre la noción clásica de probabilidad.

Considere el espacio muestral:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

donde para todo $i = 1, \dots, n$

Sucede que x_i posee las mismas condiciones que x_j con $i \neq j$ y $j = 1, \dots, n$.

Se define la probabilidad de x_i como:

$$P(x_i) = \frac{1}{|X|}$$

clásica

Investigadores: Conocimiento acerca de que el espacio muestral debe ser finito. Conocimiento sobre la representación de todos los puntos muestrales del experimento

Investigadores: Conocimiento acerca de la equiprobabilidad (indicador 2 de la categoría Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

Investigadores: el profesor afirma y respalda su conocimiento acerca de la equiprobabilidad. Además, moviliza conocimiento sobre el cociente de casos favorables y utiliza una representación algébrica.

En la Figura 2, se ilustra el proceso de análisis y destaca la contribución de P11, quien evidenció comprensión de la finitud y equiprobabilidad del espacio muestral, al asignar una probabilidad de $\frac{1}{|X|}$ a cada punto muestral y señalar que todos poseen las mismas condiciones. También demostró dominio del concepto de fracción entre casos favorables y posibles, lo que justificó una evidencia de conocimiento en los indicadores correspondientes. Asimismo, mostró conocimiento en el uso de representaciones algebraicas y simbólicas de la probabilidad.

Sin embargo, en el resto de los indicadores asociados a otras facetas del subdominio KoT, se le asignó un 0 por falta de evidencia. Con el fin de garantizar la fiabilidad del análisis, el proceso de codificación y categorización fue revisado por pares y las discrepancias identificadas fueron discutidas hasta alcanzar consenso entre los evaluadores.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados se organizan según las cuatro categorías del KoT, incluyendo una discusión de las respuestas representativas que ilustran las evidencias de conocimiento en cada una.

Evidencias de conocimiento en la categoría de definiciones, propiedades y sus fundamentos

Para esta categoría, en primer lugar, se solicitó a las personas docentes en formación que proporcionaran una definición clásica de probabilidad. En las respuestas obtenidas, se observa que el elemento más frecuentemente mencionado es el cociente entre casos favorables y posibles, identificado por nueve de los 13 participantes. Cinco aludieron a la noción de equiprobabilidad, mientras que únicamente dos hicieron referencia explícita a la condición de finitud del espacio muestral. Estos resultados evidencian que, si bien la mayoría logra reconocer al menos uno de los componentes fundamentales de la definición clásica, son pocos quienes integran los tres elementos de forma articulada. Cabe destacar que únicamente dos participantes incluyeron los tres aspectos esenciales de esta definición: el cociente, la equiprobabilidad y la finitud del espacio muestral.

El programa de estudios de Matemáticas de la educación secundaria costarricense indica que la definición utilizada es la denominada probabilidad clásica, considerando los tres elementos descritos anteriormente. Dos participantes (P02 y P04) expresaron la probabilidad como una razón entre casos favorables y casos posibles, utilizando explícitamente la relación $P(A) = \frac{n(A)}{N}$ y $P(X) = \frac{m}{n}$. En ambos casos, las respuestas se sustentan en el supuesto de equiprobabilidad de los resultados, lo que evidencia la movilización del indicador de cociente asociado a la definición clásica de probabilidad. No obstante, ninguna de las personas participantes explicitó de manera formal la condición de finitud del espacio muestral.

Otras personas participantes hicieron alusión únicamente a uno de los elementos de la definición clásica de probabilidad, ya sea al cociente o a la equiprobabilidad, sin articular ambos de manera conjunta. En particular, algunos expresaron la probabilidad como una fracción entre casos favorables y casos posibles, sin justificar la condición de equiprobabilidad, mientras que otros hicieron referencia a la igual probabilidad de ocurrencia de los eventos, sin formalizarla mediante un cociente. Estas respuestas evidencian una movilización parcial de los elementos del enfoque clásico.

La Tarea 6, adaptada de Núñez (2007), fue diseñada con el propósito de indagar el conocimiento de las futuras personas docentes de Matemática en formación sobre propiedades básicas de la probabilidad clásica, en concordancia con las recomendaciones del currículo nacional (MEP, 2012), que promueven la deducción de propiedades elementales mediante la definición clásica de probabilidad. La actividad se desarrolla a partir de un escenario en el que se extrae al azar una bola de alguno de tres recipientes (a, b o c), todos con bolas del mismo tamaño y forma, pero en diferentes proporciones de color. El recipiente a contiene 4 bolas rojas y 2 azules, el b tiene 5 rojas y 5 azules, y el c incluye 2 rojas y 4 azules. El jugador gana si obtiene una bola roja. A partir de esta situación, se solicita al participante: proponer un ejemplo de evento seguro; así como un ejemplo de evento imposible. Además de formular sus respuestas, las personas participantes debían calcular la probabilidad correspondiente y argumentar su elección con base en la definición clásica.

En cuanto a los resultados obtenidos, se identificó que ocho participantes lograron reconocer un evento seguro, mientras que 11 fueron capaces de identificar un evento imposible. No obstante, solo dos participantes dedujeron correctamente la propiedad de un evento seguro a partir de la definición clásica y únicamente uno logró hacer lo mismo respecto a un evento imposible.

En las respuestas, P03 realizó justificaciones asociadas a propiedades fundamentales de la probabilidad, particularmente a los valores extremos. En este caso, la persona participante argumenta que un evento seguro

tiene probabilidad igual a uno y que un evento imposible tiene probabilidad igual a cero, recurriendo a cocientes del tipo $\frac{n}{n}$ o $\frac{0}{n}$. Asimismo, en la respuesta del participante P03, se evidencia el uso de la suma de probabilidades para sustentar sus conclusiones, dejando en claro que los eventos son independientes. Estas respuestas demuestran la movilización de propiedades operativas de la probabilidad para justificar los valores de 0 y 1.

Por el contrario, otras personas participantes centraron su justificación únicamente en el análisis del espacio muestral, sin recurrir a los elementos formales de la definición clásica de probabilidad. En las respuestas de la persona participante P07, la justificación de los valores de probabilidad se centra exclusivamente en el análisis intuitivo del espacio muestral. A modo de ejemplo, P07 señala que un evento es seguro cuando todos los resultados posibles corresponden a los colores considerados, asignándole probabilidad uno, y que un evento es imposible cuando dicho color no se encuentra en la urna, asignándole probabilidad cero. Si bien estas respuestas evidencian cierto conocimiento sobre la estructura del espacio muestral, las explicaciones ofrecidas para asignar los valores extremos de probabilidad no se fundamentan en la definición clásica, sino que responden a razonamientos descriptivos o intuitivos, sin la explicitación del cociente.

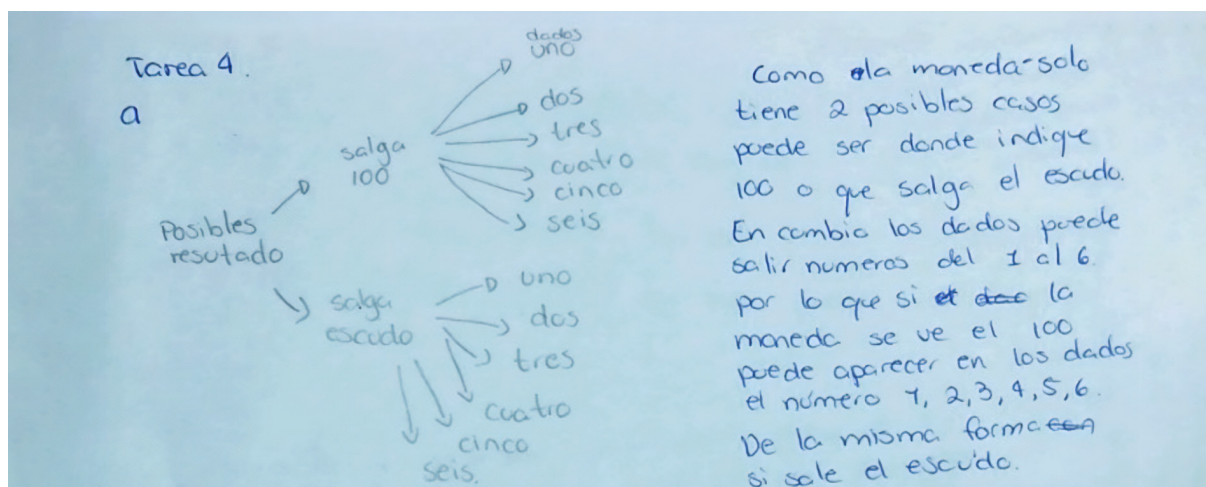
Evidencias de conocimiento para la categoría de registros de representación

La Tarea 4 fue diseñada con el objetivo de explorar el conocimiento de las futuras personas docentes de Matemática para representar e interpretar el espacio muestral de un experimento aleatorio compuesto. El enunciado planteaba el lanzamiento simultáneo de una moneda de ₡100 y un dado de seis caras numeradas del 1 al 6, solicitando a las personas participantes representar todos los posibles resultados del experimento y justificar la forma en que interpretaban dicha representación. Asimismo, se incluía una segunda consigna que invitaba a las personas participantes a utilizar un método alternativo de representación, en caso de conocerlo, y explicar su funcionamiento.

En cuanto a las respuestas, ocho participantes utilizaron duplas para representar los resultados, cuatro emplearon diagramas de árbol y uno recurrió al uso de una tabla. No obstante, solo seis participantes lograron explicar el funcionamiento del registro de representación que emplearon, lo cual sugiere que no siempre existe articulación entre representación simbólica e interpretación del experimento aleatorio. La Figura 3 presenta un ejemplo representativo del registro utilizado con su representación correspondiente en las respuestas de P03.

Figura 3.

Representación e interpretación de un diagrama de árbol por parte del P03



Nota: recopilados por las personas participantes.

Respecto al uso de representaciones alternativas, únicamente 10 personas participantes evidenciaron conocimiento de una forma distinta a la utilizada previamente. En este caso, tres optaron por el uso de duplas, tres emplearon una tabla y los cuatro restantes recurrieron a diagramas de árbol. Sin embargo, solo tres participantes lograron justificar adecuadamente el funcionamiento del nuevo registro de representación utilizado.

A modo de ejemplo, el participante P02 representó el espacio muestral mediante duplas ordenadas, combinando los resultados de una moneda y un dado: {(moneda, dado)}. En su explicación, P02 estableció explícitamente los posibles resultados de cada experimento y construyó el conjunto de pares ordenados correspondiente, interpretando cada dupla como la ocurrencia conjunta de ambos resultados. Esta respuesta evidencia la comprensión del significado estructural del registro de duplas para describir el espacio muestral, más allá de su uso meramente procedimental.

Para finalizar, el análisis global de todas las tareas del cuestionario evidenció que la representación en forma de fracción fue la más empleada por las personas participantes al expresar probabilidades, con un total de 37 apariciones. Le siguieron la representación decimal, utilizada en 10 ocasiones, y las representaciones verbal y porcentual, con 6 usos en conjunto. En menor medida, se identificó el uso de la representación algebraica, la cual fue empleada principalmente al brindar la definición clásica de probabilidad.

Evidencias de conocimiento para la categoría de fenomenología y aplicaciones

La Tarea 1 propone una historieta como recurso didáctico en la que una profesora explica un ejemplo de aplicación de la definición clásica de probabilidad, concretamente el lanzamiento de una moneda de ₡100. A partir de esta explicación, dos estudiantes intentan aplicar el razonamiento sobre la equiprobabilidad de la profesora a situaciones distintas: uno alude a la probabilidad de aprobar un examen y el otro a la detección de una enfermedad mediante una prueba médica. Posteriormente, se solicitó a las personas participantes valorar si los ejemplos planteados por las personas estudiantes son correctos.

Para esta categoría, únicamente se utilizó un indicador: Determina situaciones en las que cada punto muestral del experimento tenga la misma probabilidad de ocurrir. Siete personas participantes identificaron como incorrecto el ejemplo del estudiante 1, mientras que seis señalaron como incorrecto el del estudiante 2. No obstante, solo cuatro participantes lograron justificar correctamente la incompatibilidad de ambos contextos con el enfoque clásico, haciendo referencia al principio de indiferencia y explicando que estos fenómenos están influenciados por múltiples factores que impiden asumir equiprobabilidad.

En las respuestas de P06 y P10, se identifican argumentaciones que cuestionan el supuesto de equiprobabilidad en situaciones contextualizadas, al reconocer la influencia de factores externos sobre la ocurrencia de los eventos. En particular, ambas personas participantes señalan que no es posible asignar probabilidades iguales a eventos como aprobar un examen o enfermarse, debido a la incidencia de múltiples variables, tales como el estudio previo, condiciones de salud o factores hereditarios.

Estas respuestas evidencian que algunas personas participantes reconocen la complejidad del contexto y la presencia de condiciones que impiden considerar los resultados como igualmente probables. Sin embargo, se observa una argumentación coherente desde una perspectiva intuitiva o contextual, dicha justificación no se articula explícitamente con los elementos formales de la definición clásica de probabilidad, particularmente con el uso del cociente ni con la delimitación del espacio muestral bajo condiciones de equiprobabilidad.

Por otro lado, algunas personas participantes consideraron como correctos uno o ambos ejemplos planteados por los estudiantes. Estas respuestas evidencian sesgos de equiprobabilidad, al asumir que los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir sin tomar en cuenta las condiciones del contexto.

Además, P12 manifestó que el lanzamiento de una moneda constituye un experimento aleatorio, mientras que enfermarse o sacar una nota en un examen corresponden a situaciones deterministas. Esta respuesta evidencia una distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas, sin embargo, la argumentación queda limitada, ya que no profundiza en por qué estos ejemplos no cumplen con los supuestos de la definición clásica de probabilidad, como la equiprobabilidad o la finitud del espacio muestral.

La Tarea 3 solicitaba a las personas participantes identificar situaciones comunes relacionadas con la noción clásica de probabilidad. De las 13 personas participantes, nueve mencionaron contextos tradicionales como juegos de azar, de mesa, urnas y loterías. Una persona participante hizo referencia a eventos mutuamente excluyentes y a un caso en biología donde esta definición no necesariamente es aplicable, pues se necesita detallar aún más. Algunas de las personas participantes evidenciaron conocimiento al mencionar ejemplos adecuados, aunque también incluyeron situaciones menos frecuentes dentro de este enfoque, sin ahondar en ellas; por ejemplo, teoría de funciones continuas, análisis de crímenes y análisis del clima

Por último, se identificaron respuestas de carácter muy general, cuya falta de profundización impide garantizar que movilicen conocimiento propio del subdominio KoT en relación con las aplicaciones de este enfoque. Por ejemplo, P12 menciona que, en aquellos casos aleatorios, se aplica la definición clásica de probabilidad y en los deterministas no.

Evidencias de conocimiento para la categoría de procedimientos

La Tarea 5 plantea un experimento aleatorio compuesto que consiste en girar una ruleta equilibrada de 4 sectores numerados (1, 2, 3 y 5) y extraer una bola de una urna con 4 bolas (una azul y tres rojas) al mismo tiempo. La persona gana si la ruleta se detiene en un número par y la bola extraída es azul. A modo de ejemplo, se presenta una solución hipotética elaborada por un estudiante, quien identifica incorrectamente el espacio muestral con 8 combinaciones posibles entre los resultados de la ruleta y la urna: {(1, azul); (2, azul); (3, azul); (5, azul); (1, rojo); (2, rojo); (3, rojo); (5, rojo)}. A partir de esta identificación, el estudiante concluye que solo la dupla (2, azul) cumple la condición de ganar y aplica la definición clásica de probabilidad para ganar en el juego, el cual obtiene de resultado $\frac{1}{8}$.

Finalmente, las personas participantes debían argumentar si el procedimiento hipotético llevado a cabo por el estudiante era correcto o no. La Tabla 2 muestra cuántos y cuáles participantes evidenciaron los indicadores correspondientes a esta categoría.

Como se aprecia en la Tabla 2, siete participantes lograron justificar que el procedimiento hipotético propuesto es incorrecto, al argumentar que las condiciones dadas no son suficientes para asumir la equiprobabilidad de los resultados. En particular, el participante P08 señaló que el procedimiento no considera adecuadamente la estructura del espacio muestral, al tratar como equivalentes situaciones en las que existen más resultados posibles de los que se toman en cuenta. En su argumentación, P08 reconoce que para cada resultado existen múltiples posibilidades diferenciadas, lo que invalida el procedimiento planteado y evidencia una comprensión de la no equiprobabilidad derivada de la cantidad y naturaleza de los resultados posibles.

Tabla 2.*Personas participantes que demuestran conocimiento sobre los procedimientos asociados a la definición clásica en la tarea 5.*

Participantes	Identifica las condiciones necesarias para la aplicación de la definición clásica en el cálculo de probabilidades.	Emplea el método de dividir el número de casos favorables entre el total de casos posibles para determinar la probabilidad de un evento.	Reconoce las características del resultado obtenido al calcular la probabilidad de un suceso aleatorio.	Implementa estrategias o métodos alternativos para determinar la probabilidad de un evento.
P01	1	0	0	0
P02	0	0	0	0
P03	0	0	0	0
P04	0	0	0	0
P05	1	1	1	1
P06	0	0	0	0
P07	1	1	1	1
P08	1	0	0	0
P09	0	1	1	1
P10	0	0	0	0
P11	1	0	0	0
P12	1	1	1	1
P13	1	1	1	1
Total	7	5	5	5

Además, menos de la mitad de las personas participantes utilizaron el cociente y registros de representación para refutar el procedimiento hipotético. Las personas participantes P05, P07, P09, P12 y P13 evidenciaron comprensión en la aplicación de la regla de Laplace y emplearon métodos alternativos para calcular probabilidades, usando representaciones como tablas y diagramas de árbol. Destaca P09, quien aplicó, además, la regla de multiplicación. En su respuesta, la persona participante descompone el experimento aleatorio en dos espacios muestrales independientes: uno asociado al resultado de la ruleta y otro a la extracción de la bola de la urna. Define el evento A como la obtención de un número par y el evento B como la extracción de una bola azul, asignando a cada uno una probabilidad individual de $\frac{1}{4}$. A partir de esta caracterización, P09 asume que ambos eventos son independientes y calcula la probabilidad conjunta como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{16}$.

Otra respuesta representativa es de P05, quien realiza una representación tabular (ver Tabla 3).

Tabla 3.*Representación tabular utilizada por P05 en la tarea 5*

	R1	R2	R3	A
1	x	x	x	x
2	x	x	x	✓
3	x	x	x	x
4	x	x	x	x

Nota: recopilados por las personas participantes de investigación.

En la Tabla 3, P05 organiza de manera sistemática los resultados posibles del experimento compuesto, considerando los valores asociados a la ruleta y a la extracción de la bola de la urna. Esta representación permite identificar explícitamente los casos favorables y no favorables para el evento de interés, lo que evidencia un uso adecuado del registro tabular como herramienta para estructurar el espacio muestral. En última instancia, P05 aplica la regla de Laplace obteniendo $\frac{1}{16}$, tomando cada punto muestral como equiprobable.

Para finalizar, en la última tarea se solicitó determinar en cuál de las tres urnas es más probable obtener una bola roja. La urna *a* contiene 3 bolas rojas y 1 bola azul, la urna *b* cuenta con 6 bolas rojas y 3 bolas azules, mientras que la urna *c* tiene 3 bolas rojas y 2 bolas azules. Respecto al indicador: *Identifica las condiciones necesarias para la aplicación de la definición clásica en el cálculo de probabilidades*, todas las personas participantes, con excepción de P04, lograron evidenciar este conocimiento.

En cuanto al indicador *Emplea el método de dividir el número de casos favorables entre el total de casos posibles para determinar la probabilidad de un evento*, también fue evidenciado por todas las personas participantes, salvo por P04. Por su parte, el indicador *Reconoce las características del resultado obtenido al calcular la probabilidad de un suceso aleatorio* fue alcanzado por todas las personas participantes, excepto por P08 y P10. Además, no fue posible identificar evidencias que permitieran inferir el uso de procedimientos alternativos en el cálculo de probabilidades dentro de las respuestas analizadas para esta tarea.

Finalmente, en esta tarea se evidenció la mayor cantidad de indicadores de conocimiento en comparación con las demás, ya que se trataba de una actividad de carácter principalmente procedimental o algorítmico. El objetivo era calcular una probabilidad aplicando la definición clásica, sin requerir una justificación sobre la corrección del procedimiento o una argumentación adicional, sino solo la ejecución del cálculo.

CONCLUSIONES

Esta investigación describió el conocimiento de 13 personas docentes en formación de la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la noción clásica de probabilidad. El modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), a través del subdominio Knowledge of Topics (KoT) y sus cuatro categorías, permitió clasificar dicho conocimiento. Además, la creación de indicadores específicos para cada categoría facilitó el análisis sistemático de las respuestas obtenidas en seis tareas propuestas.

En la categoría de definiciones, propiedades y fundamentos, la mayoría de las personas participantes logró proporcionar una definición de la probabilidad clásica centrada principalmente en el cociente entre casos favorables y posibles. No obstante, fue frecuente la omisión de la condición de equiprobabilidad, aspecto esencial para la validez del enfoque clásico. Esta observación coincide con lo planteado por Contreras et al. (2013), quienes indican que algunos docentes tienden a ofrecer definiciones parciales o incompletas, lo cual puede repercutir negativamente en otras dimensiones del conocimiento matemático.

Esta omisión impacta especialmente en las categorías de fenomenología y aplicaciones, y de procedimientos, donde las personas participantes debían identificar errores al aplicar la regla de Laplace en contextos no equiprobables. Según Alfaro et al. (2020), en tareas que requieren argumentación y evaluación de validez, es común encontrar inconsistencias. Los hallazgos también coinciden con Batanero et al. (2005), quienes señalan que los futuros docentes tienden a presentar sesgos de equiprobabilidad. En contraste con estos estudios, cuando se solicitó proponer contextos en los que sí es aplicable la definición clásica, las personas participantes mencionaron, principalmente, fenómenos vinculados a juegos de azar, lo que evidencia una asociación restringida propia del enfoque clásico a contextos tradicionales.

En relación con los procedimientos, se observó que, cuando las personas docentes en formación debían calcular una probabilidad, tendían a aplicar la definición clásica e interpretar el resultado obtenido. Asimismo, en

las tareas que requerían representar los puntos muestrales, se identificó el uso de, al menos, dos registros de representación habituales en la probabilidad clásica. Estos resultados coinciden con lo mencionado por Gea et al. (2017) y Alonso-Castaño et al. (2021), quienes destacan el rol central de las representaciones en la resolución de tareas probabilísticas. Sin embargo, a diferencia de estos estudios, en la presente investigación se evidenció una presencia particularmente fuerte de registros de representación, lo cual podría explicarse por la alineación explícita de las tareas con el currículo nacional costarricense, además, esta investigación solo está centrada en el significado clásico de probabilidad.

Es relevante resaltar que las personas docentes en formación que lograron identificar procedimientos incorrectos o fenómenos que no se ajustan a la definición clásica tendieron a recurrir a registros de representación y a los alcances del enfoque clásico de probabilidad. La movilización de distintas facetas del conocimiento del KoT, especialmente los registros de representación, les permitió visualizar el espacio muestral, realizar recuentos precisos y aplicar el cociente entre casos favorables y posibles. Al descartar contextos no propios de la probabilidad clásica, se señaló que resultados como el de una prueba dependen de múltiples variables, en contraste con experimentos como el lanzamiento de una moneda.

En síntesis, el análisis de las facetas del subdominio KoT permitió identificar una presencia recurrente de evidencias en el uso de registros de representación, los cuales resultaron esenciales tanto para representar puntos muestrales como para ejecutar algoritmos previos a la aplicación de la regla de Laplace, favoreciendo el tránsito entre lo simbólico y lo conceptual.

En menor proporción, se identificaron evidencias vinculadas con la fenomenología, las aplicaciones y la fundamentación conceptual de los procedimientos. Las facetas asociadas a la argumentación y la justificación, como el análisis de procedimientos incorrectos o la utilización explícita de definiciones para sustentar propiedades, se observaron con menor frecuencia, lo que señala oportunidades claras para fortalecer la comprensión conceptual. En concordancia con Rico (2009), los registros de representación cumplen un papel articulador en estos procesos, aunque su potencial formativo se ve limitado, si no se acompaña de una fundamentación teórica sólida.

Coincidiendo con Batanero Bernabéu y Álvarez Arroyo (2023), estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de que las personas docentes cuenten con un conocimiento matemático alineado con su contexto educativo y con un conocimiento especializado del contenido que les permita no solo enseñar conceptos en distintos niveles, sino también fortalecer otras dimensiones del saber docente. Este estudio no busca generalizar resultados, sino ofrecer aportes relevantes a formadores de docentes, responsables de programas de formación y a futuras investigaciones sobre el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas.

Para futuras investigaciones, se propone extender el análisis a otros subdominios del modelo MTSK, contrastar los resultados con distintos marcos teóricos y emplear los indicadores desarrollados en este estudio en investigaciones que analicen la dinámica y las prácticas de aula en el quehacer de la persona docente.

REFERENCIAS

- Abu-Ghalyoun, O. (2021). Pre-service teachers' difficulties in reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, 108(3), 553–577. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10067-8>
- Advíncula, A., Beteta, M., León, J. C., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para su investigación. *Uniciencia*. 35(1), 190–209. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12>
- Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemáticas en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA* 14(2), 85–117. <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/pna.v14i2.9363>

- Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M., y Rodríguez-Muñoz, L. J. (2021). What mathematical knowledge do prospective teachers reveal when creating and solving a probability problem? *Mathematics*, 9(24), 3300. <https://doi.org/10.3390/math9243300>
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bastias, H. Alvarado, H. y Retamal, L. (2017). Explorando el significado intuitivo de probabilidad en profesores de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Batanero Bernabéu, C., y Álvarez Arroyo, R. (2023). Teaching and learning of probability. *ZDM-Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5>
- Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. *Granada: Universidad de Granada*.
- Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana. Revista de Educación Matemáticas de la UNL*, 1, 27-36.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa, RELIME*, 8(3), 247- 263.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo [Conferencia]. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada, España: Sociedad de Educación Matemáticas Thales.
- Batanero, C., y Chernof, E. (2018). *Teaching and learning stochastics. Advances in probability education research. ICME-13 monographs*. Springer.
- Batanero, C., y Díaz, C. (2007). The meaning and understanding of mathematics: The case of probability. *Philosophical dimensions in mathematics education*, 107-127.
- Batanero, C., Begué, N., y Ortiz, J. J. (2022). Prospective teachers' probabilistic reasoning when solving a sampling task. In S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafni, y A. Fan (Eds.), *Proceedings of the 11th international conference on teaching statistics*. IASE. http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_11_2022
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1
- Batanero, C., Godino, J. D., y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. In *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* (pp. 1-8). Johannesburg: ICMI.
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemáticas*, 32(61), 526-548. [10.1590/1980-4415v32n61a11](https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11)
- Cardeñoso, J.M., Moreno, A., García-González, E. y Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *Avances de Investigación en Educación Matemáticas*, 11, 145 – 166. <http://www.aiem.es/index.php/aiem>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D. y Muñoz-Catalán, M^a. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 22, 185–205. <https://doi.org/10.4000/adsc.748>
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education (6th ed.)*. Routledge

- Contreras García, J. M., Díaz Batanero, M. C., y Cañadas de la Fuente, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano Alcaraz, G. Gutiérrez Pereda, N. Climent Rodríguez, y A. Estepa Castro (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 238-244).
- Cruz, J., Alfaro, C., y Guillen, H. (2021). Actas del V Congreso Iberoamericano sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas CIMTSK 2021. En *Conocimiento Especializado de Profesores de matemáticas en formación inicial sobre la noción clásica de probabilidad* (pp. 216-223). <https://doi.org/10.15359/ru.38-1.5>
- Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, 6(1), 27-36.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, 57-72.
- Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gea, M.M., Parraguez, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemáticas XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.
- Gravir, O. (2019). Testing the negative recency effect among teacher students trying to generate random sequences. In U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis, (Eds.). *Proceedings of the eleventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group and Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02411594>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (ed. 6ª). México: McGraw-Hill.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Hourigan, M., y Leavy, A. M. (2020). Pre-service teachers' understanding of probabilistic fairness: Analysis of decisions around task design. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 997-1019. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1648891>
- Ingram, J. (2022). Randomness and probability: exploring student teachers' conceptions. *Mathematical Thinking and Learning*. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2016029>
- Lehrer, R., y English, L. (2018). Introducing children to modeling variability. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.). *International handbook of research in statistics education* (pp. 229-260). Springer, Cham.
- Liñán, M., Barrera, V. y Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: La resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, 17 (1), 41-63. <https://revistascientificas.uspceu.com/EA/article/view/3368>
- Liñán, M.M., Contreras, L.C. y Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Huelva* (pp. 12 -20). SGSE: Huelva.
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles Standards and for School Mathematics*. Reston, United States: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. <https://www.nctm.org/>
- Núñez, R. (2007). *Taller de estadística y probabilidad: Juegos y trabajos para afianzar conceptos*. publicatuslibros.com
- Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C., y Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 11-37, <http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ>

- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172>
- Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., y Vásquez-Ortiz, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 44(1), 135-156. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052018000100135>
- Shulman, L. S., (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Skorokhod, V. (2004). *Basic principles and applications of probability theory*. Springer Science & Business Media. <https://link.springer.com/book/10.1007/b137401>
- Universidad Nacional [UNA]. (2017). Plan de Estudios Carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas [BLEM]. EUNA. <http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentaciondigital/category/7planes-de-estudio>
- Vasco, D., Moriel, J. Jr. y Contreras, L.C. (2017). Subdominios del mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK). En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Huelva* (pp. 29-37). CGSE.
- Wild, C. J., Utts, J. M., y Horton, N. J. (2018). What is statistics? In D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.). *International handbook of research in statistics education* (pp. 229-260). Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7>
- Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2019). Mathematics teachers' specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, 21(1), 25-42.
- Zieffler, A., Garfield, J., y Fry, E. (2018). What Is Statistics Education? In D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.). *International handbook of research in statistics education* (pp. 37-70). Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7>