

Relaciones entre la probabilidad frecuentista y teórica a través de una simulación de experimento aleatorio desde la teoría de situaciones didácticas

Relationships between frequentist and theoretical probability through a random experiment simulation from the theory of didactic situations

Relações entre a probabilidade frequentista e teórica através de uma simulação de experimento aleatório a partir da teoria das situações didáticas

Roberto Muñoz Sepulveda
Colegio Alemán de Temuco
Temuco, Chile

munozsepulvedaroberto@gmail.com

 ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5509-4187>

Recibido – Received – Recebido: 23/05/2024 Corregido – Revised – Revisado: 16/08/2024 Aceptado – Accepted – Aprovado: 26/09/2024

DOI: <https://doi.org/10.22458/ie.v27i42.5310>

URL: <https://revistas.uned.ac.cr/index.php/innovaciones/article/view/5310>

Resumen: esta investigación tiene como propósito caracterizar cómo las personas estudiantes relacionan la probabilidad frecuentista con la probabilidad teórica en una situación didáctica que utiliza un simulador de experimentos aleatorios. Se optó por emplear la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), tanto para el diseño como para la construcción y análisis de una clase. La metodología consta de un enfoque cualitativo que analiza los resultados según las fases de la Teoría de Situaciones Didácticas, identificando los argumentos que establece el alumnado a partir de los distintos significados probabilísticos. La propuesta de aula se implementó en un curso de 7.º básico de un colegio particular de pago, ubicado en la ciudad de Valparaíso de Chile. La actividad se dividió en cinco partes, desde una instancia lúdica planteada a través de apuestas iniciales sobre lo que hay en una bolsa con fichas, hasta la institucionalización de la ley de los grandes números. En los resultados se encontró que la mayoría de las parejas de trabajo, al abordar la problemática, fundamentaron sus estrategias principalmente en enfoques intuitivos y frecuenciales; no obstante, algunas personas estudiantes validan sus resultados mediante argumentos asociados a los enfoques frecuenciales y teóricos de la probabilidad. En relación con lo anterior, una de las conclusiones es que los resultados frecuenciales obtenidos se lograron validar con el enfoque teórico.

Palabras clave: probabilidad, método de enseñanza, educación básica, material didáctico.

Abstract: This research aims to characterize how students relate frequentist probability to theoretical probability in a didactic situation that uses a simulator of random experiments. The Theory of Didactic Situations (Brousseau, 2007) was chosen for both the design and the construction and analysis of a class. The methodology consists of a qualitative approach that analyzes the results according to the phases of the Theory of Didactic Situations, identifying the arguments established by students based on different probabilistic meanings. The classroom proposal was implemented in a seventh-grade basic education class at a private school located in the city of Valparaíso, Chile. The activity was divided into five parts, from a recreational instance posed through initial bets about what is in a bag with tokens, to the institutionalization of the law of large numbers. The results showed that most working pairs, when addressing the problem, based their strategies primarily on intuitive and frequentist approaches; however, some students validated their results using arguments associated with both frequentist and theoretical approaches to probability. In relation to this, one of the conclusions is that the frequentist results obtained were validated using the theoretical approach.

Keywords: probability, teaching method, basic education, teaching materials.

Resumo: Esta pesquisa tem como propósito caracterizar como os estudantes relacionam a probabilidade frequentista com a probabilidade teórica em uma situação didática que utiliza um simulador de experimentos aleatórios. Optou-se por empregar a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2007), tanto para o design quanto para a construção e análise de uma aula. A metodologia tem um enfoque qualitativo que analisa os resultados de acordo com as fases da Teoria das Situações Didáticas, identificando os argumentos que os alunos estabelecem a partir dos diferentes significados probabilísticos. A proposta de aula foi implementada em uma turma de 7.º ano de uma escola particular, localizada na cidade de Valparaíso, Chile. A atividade foi dividida em cinco partes, desde uma fase lúdica proposta por meio de apostas iniciais sobre o que há em uma bolsa com fichas, até a institucionalização da lei dos grandes números. Nos resultados, verificou-se que a maioria dos pares de trabalho, ao abordar a problemática, fundamentou suas estratégias principalmente em enfoques intuitivos e frequenciais; no entanto, alguns estudantes validaram seus resultados mediante argumentos associados aos enfoques frequenciais e teóricos da probabilidade. Em relação ao exposto, uma das conclusões é que os resultados frequenciais obtidos foram validados com o enfoque teórico.

Palavras-chave: probabilidade, método de ensino, ensino básico, material didático.

INTRODUCCIÓN

A lo largo de su evolución histórica, el concepto de probabilidad ha sido objeto de diversas interpretaciones. En un primer momento, destaca su significado intuitivo, el cual surge de los juegos de azar. Más tarde, se desarrollaron dos enfoques fundamentales en probabilidad: el significado teórico y el significado frecuencial (Batanero, 2005).

De acuerdo con Vásquez y Alsina (2015), el enfoque intuitivo se basa en la comparación de la probabilidad de ocurrencia de diferentes sucesos, al utilizar términos coloquiales como “posible” y “previsible” para cuantificar el grado de incertidumbre de un evento específico. Desde esta perspectiva, dicho enfoque cobra un valor significativo como una primera aproximación al estudio de la probabilidad, al emplear la intuición como punto de partida.

El enfoque teórico, que se relaciona con el significado Laplaciano de la probabilidad, proporciona métodos prácticos para calcular la probabilidad de eventos simples; sin embargo, y según lo plantea Vásquez y Alsina (2015), no captura por completo la esencia del significado de probabilidad, dado que, es circular y restrictivo, y necesita de la condición de equiprobabilidad. En respuesta a las dificultades de la definición de Laplace, emerge el enfoque frecuencial, como una perspectiva apoyada en la repetición de experimentos para estimar la probabilidad del evento observado. Esta aproximación se conoce como la Ley de los grandes números. No obstante, presenta limitaciones como la necesidad de realizar un número infinito de repeticiones bajo condiciones idénticas, la obtención de valores aproximados en lugar de exactos o la falta de claridad sobre la cantidad necesaria de repeticiones para una aproximación precisa (Vásquez y Alsina, 2015).

Desde el punto de vista de la enseñanza de la probabilidad, para Godino *et al.* (1996), dentro de los principales obstáculos presentes en el razonamiento probabilístico, se puede mencionar el hecho de que los profesores se enfocan, de manera excesiva, en lo teórico de la probabilidad, restándole relevancia al enfoque frecuencial. Por su parte, Ireland y Watson (2009) mencionan que es insuficiente centrarse solo en la probabilidad teórica y en observar resultados experimentales, dado que, para desarrollar la conexión entre estos dos enfoques, es necesario que dicha conexión sea enseñada y experimentada explícitamente. Batanero *et al.* (2005) proponen que la enseñanza de la probabilidad debe tener en cuenta tanto el enfoque teórico como el frecuencial y hacer de manera explícita esta interrelación.

Con base en lo anterior, la tecnología ha simplificado la implementación del enfoque frequentista a través de simulaciones, lo cual permite la repetición de experimentos aleatorios en un gran número de ocasiones, para observar cómo las frecuencias se estabilizan empíricamente. Al hacerlo, se puede abordar la complejidad asociada a la Ley de los grandes números, utilizando la simulación como una

aproximación más experimental e intuitiva de dicho concepto (Gea *et al.*, 2017). Las simulaciones en los experimentos ofrecen a las personas estudiantes la posibilidad de explorar situaciones probabilísticas desde una perspectiva frecuencial, pero centrarse únicamente en un significado en la enseñanza de la probabilidad no es suficiente.

Inzunza (2017) señala que la modelación y simulación en la enseñanza de la probabilidad mediante tecnologías y software surge como un elemento para integrar los enfoques probabilísticos. En esta línea, Batanero y Sánchez (2013) mencionan que el enfoque frecuencial se ve facilitado con un software educativo, entendiéndose que este permite repetir experimentos aleatorios simulados un gran número de veces y además observar su tendencia. Asimismo, Batanero (2009) señala que la simulación y el enfoque frecuencial de la probabilidad ofrecen una solución al problema, aunque carecen del valor explicativo que proporciona el enfoque clásico.

A partir de lo anterior, es imperativo que una propuesta de enseñanza no se limite a un único enfoque de probabilidad. Es más, el currículo chileno (MINEDUC, 2015) propone de manera explícita en sus planes y programas de matemática, en el objetivo de aprendizaje número 19 (OA 19) de séptimo básico, que el estudiantado pueda comparar las frecuencias relativas de un experimento con la probabilidad obtenida de manera teórica.

De este modo, es crucial abordar este concepto desde las diferentes perspectivas, ya sean frecuenciales, teóricas o incluso intuitivas. Es esencial diseñar situaciones problemáticas que aborden la diversidad de significados asociados a la probabilidad. Al hacerlo, se permite la exploración de distintas dimensiones de este concepto, lo cual resulta en una comprensión más auténtica y completa de la probabilidad (Sanabria y Núñez, 2017). En la misma línea, para Juárez y Arellano (2021) el uso de simuladores como recurso didáctico les facilita a las personas estudiantes la comprensión de los diferentes enfoques de la probabilidad: intuitivo, frecuentista y teórico clásico. Además, Insunza (2017) señala que el uso de un software para simular experimentos aleatorios ayuda a una comprensión intuitiva de la Ley de los grandes números, lo cual permite establecer conexiones entre los aspectos teóricos y frecuentistas de la probabilidad.

Como antecedentes de investigaciones similares, Yáñez y Jaimes (2013) utilizaron un simulador para abordar la Ley de los grandes números desde un enfoque frecuencial. Los autores identificaron tres conceptos claves: 1) la variabilidad de resultados, donde pocas simulaciones muestran resultados impredecibles; 2) la estabilidad de frecuencias relativas, que se aproxima al valor teórico a medida que se realizan más simulaciones, y 3) la relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad, cuando el número de simulaciones es grande, dado que las frecuencias relativas convergen con los valores teóricos para validar los resultados frecuentistas. Estos tres significados les ayudan a las personas estudiantes a conectar de mejor manera el enfoque frecuencial con el teórico de la probabilidad a partir de la Ley de los grandes números.

Sanabria y Núñez (2010) realizaron actividades basadas en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau para explorar la efectividad del enfoque frecuencial en la comprensión de la probabilidad. Utilizando el programa Excel como simulador, las personas estudiantes observaron que, con más repeticiones, las aproximaciones de los sucesos se acercaban a los resultados teóricos. Este enfoque frecuencial ayudó a verificar los cálculos de probabilidad con los resultados de las simulaciones. Los autores sugieren que el enfoque frecuencial es útil como introducción antes de abordar el enfoque teórico, lo cual destaca la utilidad de los simuladores para mejorar la comprensión de la probabilidad.

Si se considera la problemática y los antecedentes expuestos, cobra relevancia estudiar de qué manera se relacionan los enfoques de probabilidad, cómo las personas estudiantes pueden establecer argumentos para conectar dichos enfoques y de qué manera, frente a una situación didáctica, pueden formular y validar sus respuestas. Además, si se toma en cuenta la importancia de la construcción del conocimiento, se plantea una propuesta de enseñanza que concibe tanto en el diseño como en el análisis de los resultados de esta, el marco teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007).

En palabras de Brousseau (2007), una situación es “un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable” (p. 16). Por tanto, se entiende que el medio es un subsistema autónomo con el cual el sujeto debe interactuar. Así, una situación es un entorno construido y controlado por la persona docente, quien lo utiliza como una herramienta para crear conocimiento.

Brousseau (1986) introduce una serie de conceptos fundamentales dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas, los cuales serán de utilidad en la presente investigación. Uno de estos conceptos es el medio, según lo entiende el autor, abarca los recursos que facilitan el proceso de aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos, englobando aspectos como el entorno, la labor docente y los materiales didácticos utilizados. Otro elemento relevante es el de situación, el cual se refiere a un modelo de interacción entre el medio y la persona estudiante; este también puede considerarse como un entorno creado y manipulado por cada docente.

Con base en lo anterior, tal como señalan Panizza (2003), Sadovsky (2005) y Brousseau (2007), la Teoría de Situaciones Didácticas se enfoca en el proceso mediante el cual las personas estudiantes construyen su conocimiento matemático a través de la interacción con situaciones y problemas específicos. Dado que la finalidad de esta investigación es caracterizar las relaciones que las personas estudiantes establecen al vincular los enfoques frecuentistas y teóricos de la probabilidad, esta teoría resulta pertinente, pues permite explorar cómo los alumnos y las alumnas comprenden el concepto de probabilidad a partir de los distintos enfoques en una situación didáctica específica.

A continuación, a partir de Brousseau (2007) se describirán las diferentes situaciones de una situación didáctica:

- **Situación de acción:** en esta situación, el sujeto se enfrenta de manera individual al problema. Las personas estudiantes se hacen cargo de generar acciones, como emitir hipótesis y elaborar procedimientos. Además, los ponen en práctica y los adaptan conforme obtienen información. El propósito de esto es que, a partir de sus conocimientos previos, obtengan retroalimentación del medio para organizar estrategias que ayuden en la toma de decisiones sobre el problema (Brousseau, 2007).
- **Situación de formulación:** en esta segunda situación, a partir de las exigencias del problema, se hace necesario que las personas estudiantes, dados por un emisor o receptor, intercambien mensajes comunicando sus ideas; es decir, que los sujetos sociabilicen las estrategias encontradas de manera individual con el propósito de discutir entre pares para tener una estrategia común (Brousseau, 2007).
- **Situación de validación:** los procesos de corrección de las situaciones anteriores conducen a esta tercera situación. En esta etapa, ya no se habla de un emisor y un receptor, sino de un proponente y un oponente. Estos dos roles confrontan sus mensajes con argumentos lógicos. Las personas estudiantes deben ser capaces de respaldar sus respuestas y darle veracidad a su mensaje. Si existe desacuerdo entre las partes, el oponente debe proporcionar una demostración, en conjunto con el medio, para explicar por qué ocurre de esa manera (Brousseau, 2007).
- **Institucionalización:** para finalizar, a partir de las situaciones anteriores, en esta parte el o la docente formaliza las relaciones entre las producciones de las personas estudiantes y el saber que se desea enseñar, y se concluye que el conocimiento construido por los alumnos y alumnas contempla un saber cultural (Brousseau, 2007).

En este contexto, Brousseau (2007) destaca que la Teoría de Situaciones Didácticas establece una serie de etapas inherentes al proceso de enseñanza-aprendizaje, las cuales abarcan acción, formulación, validación e institucionalización. Esta estructura, con sus fases claramente definidas, proporciona un marco organizativo para diseñar una situación didáctica pertinente a la problemática en cuestión y que permita analizar las interacciones de las personas estudiantes en cada una de estas fases.

La Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) es esencial para identificar los argumentos desarrollados a partir de cada uno de los enfoques de probabilidad. Además, permite describir cómo se conectan los significados frecuentistas con los teóricos a lo largo de las diversas fases de la situación didáctica. Por último, el marco teórico reconoce la importancia de formalizar las producciones de las personas estudiantes como un componente del saber cultural. En este sentido, la institucionalización tiene el propósito de estructurar y respaldar las relaciones construidas por las personas estudiantes respecto a los enfoques de probabilidad. Esto posibilitaría integrar el conocimiento matemático a través de la formalización de la Ley de los grandes números.

Considerando lo expuesto anteriormente, se destaca la importancia de diseñar una propuesta de enseñanza que incluya una situación didáctica de probabilidad a través de un simulador de experimentos aleatorios. Esta actividad tiene como objetivo crear un ambiente propicio para que las personas estudiantes puedan contrastar los diversos enfoques de probabilidad previamente discutidos, y según la relevancia de los conocimientos previos para la construcción del conocimiento matemático entorno a la concepción de la Ley de los grandes números.

En este escenario, se plantea la siguiente interrogante: ¿cuáles son las relaciones que las personas estudiantes establecen entre los enfoques frecuentistas y teóricos de la probabilidad, mediante un simulador de experimentos aleatorios en una situación didáctica? De esta manera, el objetivo general del estudio consiste en caracterizar las relaciones que las personas estudiantes establecen entre ambos enfoques cuando utilizan un simulador de experimentos aleatorios. El propósito es abordar la pregunta de investigación a través de objetivos específicos: identificar los argumentos que las personas estudiantes forman desde el enfoque frecuentista, determinar los argumentos que las personas estudiantes establecen desde el enfoque teórico y describir las relaciones que surgen al integrar ambos enfoques durante la situación didáctica. Esta perspectiva brindará una visión integral de cómo el alumnado comprende el concepto de probabilidad en un contexto de aprendizaje específico.

MATERIALES Y MÉTODOS

La investigación se enmarcó en un enfoque cualitativo (Bisquerra, 2004). Esto se debe a que la propuesta describió los acontecimientos de una clase de matemática en un contexto escolar. La situación didáctica planteada pretendía que, mediante un simulador de experimentos aleatorios, se institucionalizara la noción de la Ley de los grandes números. En esta línea, se adoptó un paradigma interpretativo (Bisquerra, 2004), pues el estudio de la situación didáctica se centró en las interpretaciones y significados que las personas estudiantes establecieron desde la problemática con los enfoques de probabilidad. En especial, al vincular esta investigación con el paradigma interpretativo, se pudo explorar el objeto de estudio en su entorno natural, tomando al ser humano como la fuente principal de información.

De acuerdo con esto, y según la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), se buscó describir cómo las personas estudiantes interactúan con el medio, cuáles formulaciones realizaron y cómo validaron sus estrategias. Además, dado que el objetivo es caracterizar la relación entre la probabilidad frecuentista y la probabilidad teórica en un experimento aleatorio, la naturaleza de la investigación cobra especial relevancia. Esto se debe a que el enfoque metodológico-cualitativo sugiere comprender la realidad a través de diversas perspectivas, lógicas y puntos de vista de los actores sociales que la construyen e interpretan (Galeano, 2003). Por lo tanto, en este escenario, las personas estudiantes asumieron un papel activo en la situación didáctica estudiada (Binda y Balbastre, 2013).

La muestra consideró como participantes del estudio a un curso de 7.º básico con 29 estudiantes, de índole mixto; las personas estudiantes se encuentran entre 12 y 13 años. Este curso pertenece a un establecimiento cuya dependencia es de carácter particular pagado, el cual se ubica en la ciudad de Valparaíso de Chile.

En la investigación, se utilizaron las siguientes notaciones para identificar a quienes participaron, estas están descritas en las tablas 1 y 2. Cabe mencionar que las parejas se conformaron con la numeración de las personas estudiantes respectivas; por ejemplo, P1 compuesta por E1 y E2, y así sucesivamente, sin embargo, la pareja P4 quedó de tres estudiantes dada la cantidad impar de participantes.

Tabla 1*Detalles de los y las estudiantes para el trabajo individual*

Estudiante 1 (E1)	Estudiante 7 (E7)	Estudiante 13 (E13)	Estudiante 19 (E19)	Estudiante 25 (E25)
Estudiante 2 (E2)	Estudiante 8 (E8)	Estudiante 14 (E14)	Estudiante 20 (E20)	Estudiante 26 (E26)
Estudiante 3 (E3)	Estudiante 9 (E9)	Estudiante 15 (E15)	Estudiante 21 (E21)	Estudiante 27 (E27)
Estudiante 4 (E4)	Estudiante 10 (E10)	Estudiante 16 (E16)	Estudiante 22 (E22)	Estudiante 28 (E28)
Estudiante 5 (E5)	Estudiante 11 (E11)	Estudiante 17 (E17)	Estudiante 23 (E23)	Estudiante 29 (E29)
Estudiante 6 (E6)	Estudiante 12 (E12)	Estudiante 18 (E18)	Estudiante 24 (E24)	

Nota. Elaboración propia.

Tabla 2*Detalles de las parejas de estudiantes*

Pareja 1 (P1)	Pareja 4 (P4)	Pareja 7 (P7)	Pareja 10 (P10)	Pareja 13 (P13)
Pareja 2 (P2)	Pareja 5 (P5)	Pareja 8 (P8)	Pareja 11 (P11)	Pareja 14 (P14)
Pareja 3 (P3)	Pareja 6 (P6)	Pareja 9 (P9)	Pareja 12 (P12)	

Nota. Elaboración propia.

Dada la naturaleza de la investigación, sus objetivos y las características del marco teórico, una de las técnicas de recopilación de datos que se utilizó fue la grabación audiovisual de la clase completa de manera panorámica, con el objeto de obtener una visión general de la interacción entre parejas, grupos de estudiantes y el papel del docente (Hernández-Sampieri *et al.*, 2014). Además, este registro sirvió para un análisis más específico de cómo se desarrolló particularmente la fase de validación en el plenario, la institucionalización de la actividad y la interacción del profesor a lo largo de la clase.

Por otra parte, para el resguardo de la identidad de las personas estudiantes, no se pudo grabar de manera particular a cada grupo, por lo cual se dispuso de un micrófono en un grupo específico con el propósito de tener un registro auditivo de cómo se desarrollaron las diferentes fases de la situación didáctica y, específicamente, los mensajes y estrategias empleados por las personas estudiantes en distintos momentos de la actividad. Se incorporó este instrumento de recolección de datos con el objetivo de complementar el registro audiovisual y tener mayor precisión de los diálogos de los alumnos y las alumnas.

Además, debido a las características de la investigación y el rol de la persona investigadora, se llevó a cabo una observación participante que brindó una visión general de la dinámica de la clase en todo momento (Bisquerra, 2004). También, para proporcionar una descripción más objetiva durante la situación didáctica, de acuerdo con lo que señala Bisquerra (2004) se consideró las notas de campo de manera escrita, pues permitió acceder a los argumentos que establecieron otros grupos, los cuales no fueron captados por la cámara o micrófono.

Por último, cada pareja y grupo de estudiantes dispuso de hojas de trabajo en donde se les pidió registrar el progreso de cada parte de la actividad. Esto aseguró tener el acceso a las producciones de todas las personas estudiantes, lo que facilitó el análisis de los argumentos en cada fase de la situación didáctica.

La implementación de la actividad se llevó a cabo en una clase de 90 minutos, dividiéndose en cinco momentos, estructurada de acuerdo con las fases de la Teoría de Situaciones Didácticas, como se señala en la Tabla 3.

Tabla 3

Descripción de las situaciones con respecto a la actividad

Situación	Descripción
Inicio	Parte 1: ¿Cómo saber? Las personas estudiantes, de manera individual, leen el problema y responden de acuerdo con las apuestas que harán sobre las fichas que podrían salir de la bolsa.
Acción	Parte 2: ¿Quién gana? Las personas estudiantes, organizados en parejas, a partir de un simulador, realizan apuestas con su compañero o compañera.
Formulación	Parte 3: Descubriendo las fichas Las personas estudiantes, a partir de los resultados del simulador, inferirán cuántas fichas hay en la bolsa y cuántas de cada color.
Validación	Parte 4: Plenario Las personas estudiantes exponen sus métodos y estrategias de resolución.
Institucionalización	La persona docente, a partir de los resultados de las parejas de trabajo, ordena el trabajo de cada estudiante y formaliza el concepto de la Ley de los grandes números.

Nota. Elaboración propia.

Siguiendo los elementos fundamentales de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) se procedió a operacionalizar las fases de la situación didáctica. En este contexto, se empleó el marco teórico para analizar cada etapa de la implementación de la actividad didáctica con el propósito de identificar y describir los argumentos que las personas estudiantes establecieron. Este análisis se llevó a cabo con las categorías planteadas en la Tabla 4, las cuales permitieron un análisis detallado de las interacciones y conexiones que surgieron durante el proceso, conforme a los principios y enfoques establecidos por la Teoría de Situaciones Didácticas.

Tabla 4
Categorías de análisis

Situación	Etapas de la situación	Descriptor
Acción	<p>Parte 2: ¿Quién gana?</p> <p>Las personas estudiantes trabajan en parejas para extraer información del medio, emitiendo mensajes para determinar cuáles son las opciones de apuesta más favorables y desfavorables, basándose en sus acciones con el simulador.</p>	<p>A1: Realizan el experimento aleatorio mencionando una persona ganadora por cada extracción.</p> <p>A2: Identifican una persona ganadora en relación con el resultado que se repite más veces.</p> <p>A3: Registran los resultados de cada extracción señalando cuál es la mejor opción de apuesta y cuál la peor.</p> <p>A4: Realizan una tabla de frecuencia que contempla todos los resultados con sus respectivas frecuencias relativas, justificando las mejores y peores apuestas con argumentos numéricos.</p>
Formulación	<p>Parte 3: Descubriendo las fichas</p> <p>En grupos de cuatro (se unen parejas), las personas estudiantes intercambian mensajes entre sí para determinar la cantidad de fichas que hay en la bolsa. Esto lo hacen al relacionar la información de la tabla de frecuencia de la simulación con la probabilidad teórica del evento en cuestión.</p>	<p>F1: Realizan el experimento un número grande de extracciones relacionando la estabilización de la frecuencia relativa con la razón entre la frecuencia absoluta y el total de extracciones.</p> <p>F2: Señalan la cantidad de fichas, al argumentar que, si fuese otra la cantidad, la frecuencia de los resultados sería diferente a los del simulador.</p> <p>F3: Determinan la probabilidad teórica de acuerdo con la cantidad de fichas propuestas.</p> <p>F4: Establecen una relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad teórica, observando que se aproximan a medida que se realizan un número considerable de extracciones, fundamentando, de esta manera, la cantidad de fichas.</p>
Validación	<p>Parte 4: Plenario</p> <p>Frente a la clase, las personas estudiantes explican las estrategias que emplearon para determinar la cantidad de fichas y por qué no podría ser otra cantidad distinta. Justifican sus estrategias mediante cálculos basados en probabilidades frecuentistas y teóricas.</p>	<p>V1: Argumentan su postura a partir de la razón entre frecuencia relativa con la cantidad total de datos.</p> <p>V2: Argumentan su postura a partir del cociente entre casos favorables y casos totales.</p> <p>V3: Validan sus resultados al vincular ambos enfoques de probabilidad, por medio de la aproximación de los valores determinados por la frecuencia relativa y los casos favorables, respecto de los casos totales.</p>

Nota. Elaboración propia.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para abordar al objetivo general de esta investigación, el cual busca caracterizar las relaciones que las personas estudiantes establecen al vincular los enfoques frecuentistas y teóricos de la probabilidad mediante el uso de un simulador de experimentos aleatorios, se identificaron en los distintos momentos de la situación didáctica, las interacciones de las personas estudiantes con el medio y cómo se desarrollaron las fases de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007).

A partir de la información recopilada mediante la grabación y transcripción de la clase, junto con las notas de campo y las hojas de trabajo de las personas estudiantes, se llevó a cabo el análisis de la implementación de la actividad de acuerdo con las categorías planteadas en la Tabla 4.

Fase de acción. Parte 2 ¿Quién gana?

Esta parte de la actividad está en estricta relación con la fase de acción (Brousseau, 2007), las personas estudiantes trabajaron en parejas para extraer información del medio, emitiendo mensajes para determinar cuáles fueron las opciones de apuesta más favorables y desfavorables, basándose en sus acciones con el simulador.

A1: Realizan el experimento aleatorio mencionando una persona ganadora por cada extracción.

Inicialmente, todas las parejas hicieron sus apuestas según lo propuesto en el inicio de la clase. Algunas de estas parejas llevaron un registro de cada extracción, como se ilustra en la Figura 1, y modificaron sus apuestas en cada iteración. Permitiéndoles verificar en un conjunto de repeticiones quién de los dos ganó más veces. Estas acciones, realizadas en interacción con el simulador, les ayudó a determinar cuáles colores de fichas están en la bolsa y cuál es la opción más conveniente para aumentar sus posibilidades de ganar. Es decir, a partir de estas acciones, se generaron hipótesis y se retroalimentaron del medio para tomar decisiones. Es importante señalar que sus afirmaciones tienen un fundamento intuitivo (Vásquez y Alsina, 2014), pues sus conjeturas se respaldan en que un resultado es más favorable que otro.

Figura 1

Registro de extracciones P9

Puntos = 4 Bastian		Benja M	Puntos = 5
1 Verde y azul X		1 Blanco y azul X	
2 Azul y Amarillo X		2 Amarillo y Verde X	
3 Rojo y azul X		3 Rojo y Verde X	
4 Rojo y Rojo ✓		4 Rojo y Rojo ✓	
5 Rojo Rojo X		5 Rojo Azul ✓✓	
6 Rojo Rojo ✓		6 Rojo Rojo ✓	
7 Rojo Azul X		7 Rojo Rojo ✓	
8 Azul Rojo X		8 Rojo Azul X	
9 Azul Rojo ✓		9 Rojo Rojo ✓	
10 Rojo Rojo ✓		10 Rojo Rojo ✓	

Nota. Producción P9.

A2: Identifican una persona ganadora en relación con el resultado que se repite más veces.

Como se muestra en el siguiente diálogo, hay estudiantes que pusieron a prueba las opciones propuestas al inicio de la actividad al establecer una persona ganadora tras una cantidad de repeticiones acordadas.

Docente: ¿Qué apostaste tú?

E11: Que salía una de color morado y amarillo.

Docente: ¿Y tú?

E12: Que son de igual color.

Docente: ¿Ha salido una de color morado y amarillo?

E11: Ninguna, he perdido todo el rato.

Docente: Si pudieses apostar de nuevo, ¿qué apostarías?

E11: Que saldrán de distinto color, de esa forma podría ganar.

Docente: ¿Por qué podrías ganar?

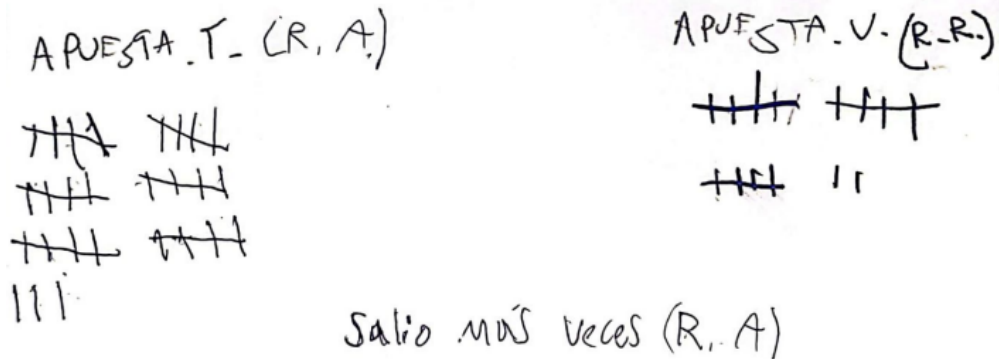
E11: Por que sale más veces "azul-rojo" o "rojo-azul".

En el diálogo, se puede deducir que el estudiante, al interactuar con el simulador, se da cuenta de que su primera elección no aparece en los resultados. A través de su interacción con el medio, observaron que una opción se repite más que la otra, lo cual los llevó a pensar que esta segunda opción tiene más posibilidades ganar en la apuesta; es decir, a partir de la información del medio, modificaron y adaptaron su estrategia.

Además, hubo siete parejas que realizaron múltiples extracciones de fichas para poner a prueba cada opción. Como se muestra en la Figura 2, cada estudiante hizo una apuesta en relación con los colores de las fichas y llevaron un registro de sus resultados. Tras repetir el experimento 50 veces, determinaron cuál de las dos opciones se ha presentado con mayor frecuencia, y la consideraron como la ganadora. De esta forma, se infiere que las personas estudiantes abordan una aproximación del significado frecuencial, fundamentando la opción ganadora por la cantidad de veces que se repite un resultado.

Figura 2

Registro de apuestas P7

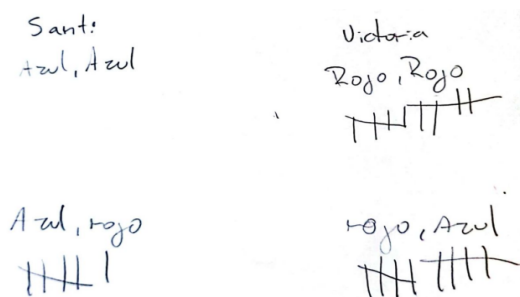


Nota. Producción P7.

A3: Registran los resultados de cada extracción señalando cuál es la mejor opción de apuesta y cuál la peor.

Solo una pareja, como se muestra en la Figura 3, realizó un seguimiento de cada extracción. Además, consideraron como distintas las combinaciones "azul-rojo" y "rojo-azul". Según lo que se puede observar en su registro, cada estudiante asumió una doble apuesta en la cual se verificó que solo una opción nunca se presenta en los resultados.

Asimismo, con esta configuración de resultados posibles, se facilitó que, en etapas posteriores a la actividad, se formalizara el espacio muestral del experimento. Sumado a esto, con el registro de las frecuencias de los resultados, se desarrolló un acercamiento al enfoque frecuencial, lo que puede servir como una etapa introductoria para abordar el enfoque teórico (Sanabria y Núñez, 2010).

Figura 3*Registro de apuestas P10*

Nota. Producción P10.

A raíz de lo anterior la persona docente mantuvo el siguiente diálogo con el grupo de estudiantes.

Docente: ¿Quién ganó?

E20: Ganó la Vicky. Nunca aparece “azul-azul” y por eso voy perdiendo.

Docente: ¿Por qué consideran distinto el “azul-rojo” de “rojo-azul”?

E21: Cuando apretamos, a veces sale el azul a la izquierda o a la derecha, por eso creemos que son apuestas distintas.

Además, observaron las diferentes opciones proporcionadas por el simulador, las personas estudiantes hicieron una distinción entre sus apuestas, ya sea el caso “azul-rojo” o “rojo-azul”, aunque el experimento extrae dos fichas al mismo tiempo. Cabe mencionar que no se evidencia ningún intento por interpretar la extracción simultánea como la combinación de sacar una ficha primero y otra después; según sus interacciones con el simulador, percibieron estos dos casos como diferentes. Es importante señalar que tres parejas de trabajo también consideraron esta combinación como una apuesta diferente. Por otra parte, en el diálogo emitieron una hipótesis importante en relación con la configuración de la opción “azul-azul”, dando a entender que no aparecen dos fichas de color azul, por lo cual lo consideraron como un evento imposible.

A4: Realizan una tabla de frecuencia que contempla todos los resultados con sus respectivas frecuencias relativas, justificando las mejores y peores apuestas con argumentos numéricos.

Un total de cinco parejas consideraron necesario llevar un registro de los resultados y calcular la razón de las veces que se repite un resultado en relación con el total, como se puede apreciar en la Figura 4. En sus anotaciones, las personas estudiantes utilizaron “fr” como abreviatura para denotar la frecuencia relativa de su apuesta. Además, hicieron una distinción entre los casos “rojo-azul” y “azul-rojo”, concluyendo que la mejor apuesta es “azul-rojo” porque es la que más se repite. Cabe mencionar que las otras cuatro parejas, si bien escribieron la frecuencia relativa de sus opciones, solo registraron las de sus apuestas, señalando a partir de la frecuencia relativa quién de los dos fue la persona ganadora. Basándose en sus interacciones con el simulador y la retroalimentación con el medio, las parejas pudieron formular hipótesis sobre cuál apuesta se repite con mayor frecuencia. Sus conclusiones se apoyaron en sus conocimientos previos sobre la frecuencia relativa, entendida como la razón entre las veces que se repite un evento y el total de extracciones. Con esto, se puede inferir que las personas estudiantes son capaces de identificar la opción más favorable para realizar sus apuestas. Estableciendo conexiones entre los aspectos intuitivos y frecuenciales, dando a entender cuál resultado es más probable a medida que se repite el experimento, fundamentando su afirmación con la frecuencia relativa del suceso.

Figura 4

Tabla de frecuencias P1

11 veces Azul, rojo	$\frac{f_r}{T}$ $\frac{11}{20}$
5 veces Rojo, azul	$\frac{5}{20}$
4 veces Rojo, rojo	$\frac{4}{20}$

Nota. Producción P1.

En resumen, durante esta fase de acción, las personas estudiantes emitieron mensajes conforme extraen información del medio. A partir de la retroalimentación con el simulador, sus elecciones de apuestas se basaron principalmente en cuál de los resultados es más evidente, sin tener un conocimiento previo de la cantidad de fichas en juego ni por qué una opción se repite más que otra. Es decir, desde un significado intuitivo, percibieron a una de las opciones como la más favorable. Por otra parte, varias parejas transitan desde ir comprobando cada apuesta con el simulador (A1) a plantear un conteo sobre cuál resultado se repite más, registrándolo como la razón entre la preferencia y el total, para señalar la frecuencia relativa de ese suceso (A4).

De acuerdo con Vásquez y Alsina (2015), las personas estudiantes se encuentran en un proceso de mediación entre el significado intuitivo y el enfoque frecuentista de la probabilidad. Durante esta fase, utilizan términos como “más posible” o “improbable” para referirse a lo intuitivo. Después de repetir el experimento varias veces, llevan a cabo un conteo y utilizan la frecuencia relativa para determinar al ganador, lo que refleja una aproximación al enfoque frecuentista.

Fase de formulación. Parte 3 Descubriendo las fichas

Esta parte de la actividad se sitúa en la fase de formulación (Brousseau, 2007) donde las personas estudiantes intercambiaron mensajes entre sí para determinar la cantidad de fichas que hay en la bolsa. Esto lo hacen al relacionar la información de la tabla de frecuencia de la simulación con la probabilidad teórica del evento en cuestión.

F1: Realizan el experimento un número grande de extracciones relacionando la estabilización de la frecuencia relativa con la razón entre la frecuencia absoluta y el total de extracciones.

En esta fase, cinco parejas formularon mensajes acerca de la estabilización de la frecuencia relativa, aproximándose a un valor específico. Solo cuatro parejas superaron las 100 extracciones, y para dos de ellas, este número es suficiente porque pudieron calcular el porcentaje de manera inmediata con esa cantidad. Al preguntarles si aumentarían ese número, indicaron que se mantiene una tendencia en los valores, por lo que no desean incrementar el número de extracciones; en conclusión, los resultados se aproximan al 33% como se ilustra en la Figura 5. Juárez y Arellano (2021) señalan que este aspecto se relaciona con una conexión con el enfoque frecuentista, lo cual permite posteriormente realizar un vínculo con lo teórico. Además, como apunta Inzunza (2017), a partir de la estabilización de la frecuencia, se desarrolla una comprensión intuitiva de la Ley de los grandes números, lo cual corresponde a una conexión con el enfoque frecuentista. Es decir, las personas estudiantes establecieron argumentos a partir del significado frecuentista, para formalizar el espacio muestral del experimento.

Figura 5
Producción de dos parejas

Resultados	Frecuencia	Resultados	Frecuencia
	33		79
	32		95
	35		76
Total	100	Total	260

F2: Señalan la cantidad de fichas, al argumentar que, si fuese otra la cantidad, la frecuencia de los resultados sería diferente a los del simulador.

En esta fase, nueve parejas especificaron la cantidad de fichas y describieron sus resultados, indicaron que hay dos fichas de color rojo y una de color azul, tal como se muestra en la Figura 6. Fundamentaron su respuesta en el hecho de que nunca observaron el caso de dos fichas azules, por lo que se concluyó que debe haber una ficha azul y, si hubiera más fichas rojas, la frecuencia del caso “rojo-rojo” sería mayor. Estas afirmaciones se basaron en su actuar con el medio y en la observación de la frecuencia absoluta de un evento. Además, señalaron que, debido a la estabilización de las frecuencias, cada frecuencia relativa se acerca a un tercio. Este aspecto es relevante, porque como señalan Sanabria y Núñez (2010), se puede formalizar el espacio muestral y, de esta manera, argumentar sus resultados desde un significado teórico. Se puede inferir que, en estas afirmaciones, las personas estudiantes establecieron argumentos desde el enfoque frecuencial para formular su resultado sobre la cantidad de fichas que hay en la bolsa.

Figura 6
Respuesta de fichas P2

Non 2 fichas rojas porque sino la frecuencia aumentaría en el doble rojo.

No pueden haber 2 azules porque nunca salió en los resultados 2 veces.

Si fueran 3 rojas aumentaría la posibilidad de sacar doble rojo porque solo habría una azul comparado con 3 rojas.

Los valores se hacen con el total dividido en 3 (cont. resultados)

Nota. Producción P2.

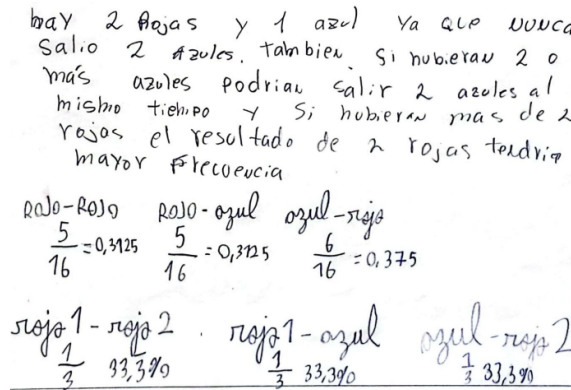
F3: Determinan la probabilidad teórica de acuerdo con la cantidad de fichas propuestas.

En este caso, tres parejas identificaron el espacio muestral del experimento y calcularon la probabilidad teórica de cada evento. De cierta manera, se puede inferir, a partir de la Figura 7, como señala Inzunza (2017), que el mensaje formulado a través de la probabilidad teórica tiene como objetivo establecer una relación con la frecuencia relativa. Las personas estudiantes también indicaron el porcentaje de ambos

cocientes, con lo cual comunicaron una estrategia común de la pareja en relación con la cantidad de fichas, vinculando los enfoques probabilísticos para responder a la cantidad de fichas. Se puede inferir, entonces, que las personas estudiantes establecieron argumentos teóricos para determinar la cantidad de fichas, dado que su afirmación se fundamentó en el cálculo de la probabilidad mediante la regla de Laplace.

Figura 7

Probabilidad teórica 2 rojas y 1 azul



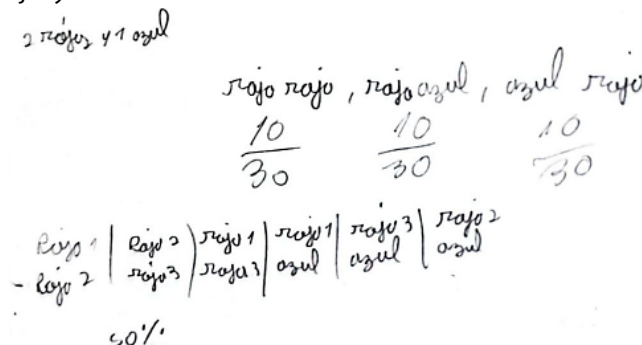
Nota. Producción P5.

F4: Establecen una relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad teórica, observando que se aproximan a medida que se realizan un número considerable de extracciones, fundamentando, de esta manera, la cantidad de fichas.

En este caso, las tres parejas señaladas anteriormente mencionaron la cantidad de fichas que hay en la bolsa, formularon mensajes sobre cómo serían las frecuencias si hubiera más fichas rojas. Además, calcularon la probabilidad teórica de los eventos y, además, como se muestra en la Figura 8, escribieron el espacio muestral si hubiese tres fichas rojas y una azul. A partir de lo anterior, mediante el caso de “rojo-rojo”, interpretaron de manera teórica que la probabilidad es del 50%, lo cual no se relaciona con el experimento que tiene dos fichas rojas y una azul. De esta manera, como lo señala Inzunza (2017), formularon sus resultados sobre la cantidad de fichas a partir de aspectos teóricos de la probabilidad relacionados con los aspectos frecuenciales y, de esta forma, fueron capaces de argumentar la cantidad de fichas. A partir de la interpretación de las personas estudiantes, se infiere que los resultados teóricos logran validar los frecuenciales, así, sus respuestas sugieren la conexión entre ambos enfoques probabilísticos.

Figura 8

Probabilidad 3 rojas y 1 azul



Nota. Producción P4.

A raíz de lo anterior, la persona docente mantuvo el siguiente diálogo con la pareja de estudiantes:

Docente: Ustedes dicen que son dos rojas y una azul. ¿Por qué no podrían ser tres rojas?

E7: Si fuesen más rojas la frecuencia del "rojo-rojo" sería mayor.

E8: Además, los resultados de la tabla se acercan al 33 por ciento, lo mismo que al calcular la probabilidad.

.....

Docente: ¿Y cómo sería la probabilidad si fueran tres rojas y una azul?

E7: En el caso "rojo-rojo" sería un 50 por ciento lo que no se parece a la tabla.

De esta intervención, se puede deducir que la formulación de sus mensajes se argumenta por los aspectos teóricos a partir del cálculo de probabilidades y frecuenciales mediante la frecuencia relativa, al conjeturar que ambos resultados se aproximan. Además, al conectar ambos se puede concluir su respuesta sobre la cantidad de fichas.

En resumen, en esta fase de formulación, a partir de las acciones con el simulador, las personas estudiantes intercambiaron mensajes sobre sus argumentos intuitivos, frecuenciales y teóricos. Como señalan Yáñez y Jaimes (2013), las personas estudiantes transitaron por algunos de los significados del enfoque frecuencial, y establecieron a partir de la estabilización de la frecuencia relativa cuál es el espacio muestral, y de esta forma mencionaron la cantidad de fichas que hay en la bolsa (F1). De acuerdo con esto, para las parejas no es complejo precisar la cantidad de fichas azules, por el contrario, para las fichas rojas sus afirmaciones se pueden relacionar con el enfoque intuitivo y el frecuencial (Vásquez y Alsina, 2015), pues señalaron lo que podría ocurrir si fuese otra la cantidad de fichas rojas. Es decir, si fuesen más fichas de ese color, la opción "rojo-rojo" tendrá una mayor frecuencia con respecto a las demás (F2). Al mismo tiempo, se observan que tres parejas validaron sus resultados a partir de aspectos teóricos contrastados con los frecuenciales mediante el simulador (Inzunza, 2017), lo cual permite interpretar que estos estudiantes pudieron establecer conexiones entre ambos enfoques, afirmando que, de acuerdo con sus resultados, esa debía ser la cantidad de fichas (F4).

Fase de validación. Parte 4 Plenario

Esta etapa de la clase hace correspondencia con la fase de validación (Brousseau, 2007), donde las parejas de estudiantes frente al curso explicaron las estrategias que emplearon para determinar la cantidad de fichas y por qué no podría ser otra cantidad distinta, lo cual justifica sus estrategias mediante cálculos basados en probabilidades frecuentistas y teóricas.

V1: Argumentan su postura a partir de la razón entre frecuencia relativa con la cantidad total de datos.

La primera pareja en pasar a la pizarra expuso la cantidad de fichas que había en la bolsa. Como se desprende del siguiente diálogo, su argumento se basó en una concepción intuitiva y frecuentista (Vásquez y Alsina, 2015) de lo que debería ocurrir si hubiera una cantidad diferente de fichas. Argumentaron que, de haber más fichas rojas, la frecuencia del resultado "rojo-rojo" sería mayor.

Docente: ¿Por qué no hay tres rojas?

E21: Porque podría haber más veces "rojo-rojo", que azul con rojo o rojo con azul, disminuiría la probabilidad de que salga un azul... Nosotros lo hicimos diez veces, y nos salió cinco veces "rojo-rojo", cuatro veces "rojo-azul" y una vez "azul-rojo".

Docente: Puedes escribir eso, ¿alguien lo hizo más de diez veces?

E26: Nosotros 50.

Docente: ¿Qué resultados te dieron?

E26: 14, 18 y 18.

Docente: ¿Quién obtuvo un número más grande que 50?

E12: 200, el "rojo-rojo" 77, el "rojo-azul" 92 y el "azul-rojo" 81.

Docente: ¿Y por último ustedes?

E16: Nosotros 250, "rojo-rojo" 79, "rojo-azul" 95 y "azul-rojo" 76.

Docente: En la medida que son más grandes esos resultados, ¿qué ocurre?

E20: Se van igualando.

Docente: ¿A qué se van igualando?

E20: Al 33 por ciento.

Además, como resultado de la presentación de P11, la persona docente planteó una pregunta sobre lo que sucedería si se aumentara el número de extracciones, las parejas respondieron que el valor se aproximaría al 33%. Es relevante destacar que identificaron que la frecuencia relativa comienza a estabilizarse en un valor específico (Juárez y Arellano, 2021), lo cual respalda su argumentación desde la perspectiva frecuentista, como se observa en la Figura 9. Por lo tanto, se establecieron conexiones entre los aspectos intuitivos y el enfoque frecuentistas, lo cual les permite fundamentar su afirmación de cómo sería el resultado si fuera otra la cantidad propuesta; es decir, su validación ocurre por la intuición de cómo sería la estabilización de la frecuencia relativa.

Figura 9

Producción Plenario P11

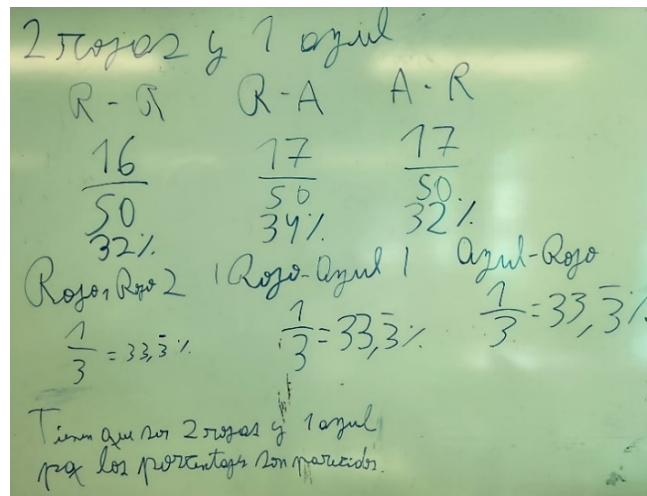
		14	77	79
R,R	5	18	92	95
R,A	4	18	81	76
A,R	1			
Total	10	50	200	350

V2: Argumentan su postura a partir del cociente entre casos favorables y casos totales.

La segunda pareja P5 expuso su resolución a partir del espacio muestral del experimento, como se muestra en la Figura 10. Según señalan Sanabria y Núñez (2010), la relación que se plantea desde el aspecto frecuentista sirve como una etapa para introducir un aspecto teórico de la probabilidad, de esta manera, basándose en los resultados de la tabla de frecuencias y la interacción con el simulador, las personas estudiantes determinaron la probabilidad teórica asociada a cada evento del espacio muestral. Observaron que estos porcentajes son similares y, a partir de esa relación entre lo frecuentista y lo teórico, validaron su resultado sobre la cantidad de fichas. Con base en lo anterior, se puede inferir que estas parejas de trabajo pudieron establecer conexiones con el significado teórico, utilizando su afirmación para fundamentar el cálculo de la probabilidad, mediante la utilización de la regla de Laplace.

Figura 10

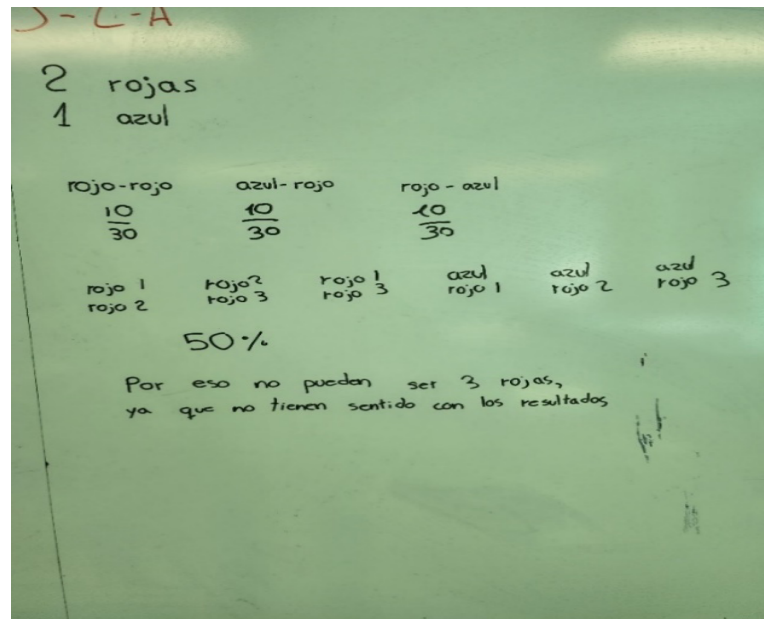
Producción plenario P5



V3: Validan sus resultados al vincular ambos enfoques de probabilidad por medio de la aproximación de los valores determinados por la frecuencia relativa y los casos favorables, respecto a los casos totales.

La pareja P4 presentó argumentos similares a los de P11 y P5 en relación con lo que sucedería en términos frecuentistas, pero, además, como se muestra en la Figura 11, señala cómo sería la probabilidad si hubiera tres fichas rojas y una azul. A partir de esto, sus argumentos se desarrollan desde el espacio muestral, lo cual indica la probabilidad teórica del suceso "rojo-rojo", si hubiera tres fichas rojas y una azul, la cual correspondería al 50 %. De esta manera, su validación, como señala Inzunza (2017), involucra la relación de ambos enfoques, mencionado que los resultados de dos rojas y una azul, que se acercaban al 33 %, no tendrían sentido si hubiera tres fichas rojas; por lo tanto, concluyen que solo puede haber dos rojas y una azul. En efecto, se puede aseverar que esta pareja de trabajo validó su resultado mediante la relación entre el enfoque teórico y el frecuentista, logrando el objetivo de la actividad.

Figura 11
Producción plenaria P4



En resumen, la primera pareja en exponer sus resultados planteó la cantidad de fichas de manera correcta y argumentó, de forma intuitiva y frecuencial, por qué no podría ser otra la cantidad. La segunda pareja, a través de la probabilidad teórica, determinó el porcentaje de cada suceso y argumentó cómo los porcentajes obtenidos por la regla de Laplace se aproximan con los frecuenciales, por lo que utilizaron ese argumento para determinar la cantidad de fichas en la bolsa; es decir, a partir de los argumentos teóricos validaron sus resultados con los frecuenciales. Además, frente a la interrogante de por qué no podrían ser tres fichas rojas, la última pareja en exponer, escribió el espacio muestral asociado a ese experimento para determinar su probabilidad teórica y argumentar que no podría ser esa la cantidad, dado que los porcentajes no se aproximan a los de la tabla de frecuencias, vinculando, de esta manera, el enfoque teórico con el frecuentista, tal como lo señala Inzunza (2017) en su investigación.

A partir de lo mencionado y según el desarrollo progresivo de cada una de las parejas que expusieron sus estrategias, se puede inferir cómo los significados intuitivos, frecuentistas y teóricos se relacionan con la comprensión del concepto de probabilidad. Queda claro que presentar una situación desde un enfoque aislado carece de valor explicativo (Sanabria y Núñez, 2017; Ireland y Watson, 2009), dado que, para explorar las diferentes dimensiones de los conceptos probabilísticos, es esencial incorporar actividades que reflejen los distintos enfoques y, al mismo tiempo, hagan explícitos estos vínculos.

A modo de síntesis, en la Tabla 5 se presenta una visión general del proceso de análisis de datos. Es importante destacar que las categorías de análisis están estrechamente vinculadas con la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), y la evolución de cada uno de los descriptores no sigue una secuencia lineal estricta, pues esto resulta inherente al marco teórico. Asimismo, hay momentos en los cuales algunas fases se superponen y, en este sentido, puede que no se registre evidencia en las hojas de trabajo o las notas de campo que respalde la transición a la formulación o validación por parte de otras parejas de trabajo que no están señaladas en la tabla.

Finalmente, en relación con el tránsito entre las fases de la situación didáctica, es esencial destacar que los descriptores propuestos permiten evidenciar cómo las parejas de trabajo avanzan de una fase a otra y alcanzan los objetivos específicos planteados. En este contexto, A4 y F2 representan argumentos cruciales que establecen conexiones con el enfoque frecuentista, en este punto se visualiza a seis parejas que pudieron alcanzar el primer objetivo específico planteado. Por otro lado, F3 y V2 son argumentos específicos que se establecen con el enfoque teórico, observando que tres parejas de trabajo pudieron responder a este segundo objetivo específico. Mientras que F4 y V3 describen las relaciones planteadas por las personas estudiantes para vincular ambos enfoques, lo cual solo lo evidencian cuatro parejas de trabajo que, en sus producciones o participación en el plenario, presentan argumentos que integran ambos enfoques para responder a la situación didáctica.

Tabla 5
Panorama general

Parejas	A1	A2	A3	A4	F1	F2	F3	F4	V1	V2	V3
P1	X			X							
P2	X			X		X					
P3	X	X				X					
P4	X			X	X	X	X	X	X	X	X
P5	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X
P6	X	X				X					
P7	X			X	X	X			X	X	X
P8	X	X									
P9	X					X					
P10	X		X		X	X					
P11	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X
P12	X	X									
P13	X	X									
P14	X										

Nota. Elaboración propia.

CONCLUSIONES

Con respecto al objetivo general de la investigación, el cual pretendía caracterizar las relaciones que las personas estudiantes establecen al vincular enfoques frecuentistas y teóricos de la probabilidad, mediante el uso de un simulador de experimentos aleatorios en una situación didáctica, se puede evidenciar en la actividad que cuatro de las catorce parejas de trabajo pudieron relacionar la probabilidad frecuentista con la teórica. No obstante, la mayoría de las parejas solo consideró argumentos basados en perspectivas intuitivas y frecuenciales, pero no lograron en su totalidad el objetivo propuesto de la situación didáctica.

En relación con las parejas que no alcanzan el objetivo, se observa que, en el desarrollo de sus respuestas, las personas estudiantes argumentaron que la cantidad de fichas no podía ser otra, pues, si hubiera más del color rojo, aumentaría la probabilidad de que las fichas sean del mismo color. Desde un enfoque intuitivo y frecuencial, estas parejas señalaban que los resultados no coincidirían con los datos de la tabla de frecuencias, por lo cual debería haber dos rojas y una azul. Sin embargo, las cuatro parejas que lograron alcanzar el objetivo, utilizando el simulador, realizaron un número significativo de extracciones, y en sus resultados, señalaron que los porcentajes de ambas probabilidades, la teórica y frecuencial, eran relativamente cercanos, lo cual les permitió determinar la cantidad de fichas mediante la aproximación entre los resultados frecuenciales y los obtenidos de manera teórica. De este modo, estas parejas de trabajo lograron vincular ambos enfoques.

En relación con la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), durante la segunda parte de la actividad, destinada a la situación de acción, las parejas de estudiantes emitieron mensajes sobre cuál opción consideraban más favorable, basándose en su interacción con el medio y la retroalimentación obtenida a través del simulador de extracciones. Esto llevó a las personas estudiantes a responder inicialmente desde un enfoque intuitivo, indicando cuál opción les parecía más previsible o probable. Este comportamiento está en línea con lo que señalan Vásquez y Alsina (2015), para quienes esta es la primera aproximación al desarrollo del enfoque intuitivo. Posteriormente, al adaptar sus hipótesis, en retroalimentación con el medio, utilizan la frecuencia relativa para indicar la mejor opción de apuesta. Según Batanero (2005), esto sugiere que las personas estudiantes están desarrollando una comprensión del enfoque frecuentista.

En la tercera parte de la actividad, dispuesta para la formulación, la mayoría de los argumentos se plantearon con respecto al significado intuitivo y frecuencial, al señalar que, conforme hubiese más fichas de un color, la frecuencia relativa debería ser mayor; por ende, la probabilidad de igual color tendría que ser más alta, aludiendo a lo que Vásquez y Alsina (2015) señalan como concepciones del enfoque intuitivo y frecuentista. No obstante, los argumentos de las personas estudiantes carecen de una validación que vincule los aspectos frecuenciales y teóricos. Por último, algunas parejas afirmaron que, dado que la probabilidad teórica de un evento se aproxima a su frecuencia relativa, no había otro resultado posible para la problemática, lo cual responde al problema con argumentos numéricos probabilísticos. Esto respalda la afirmación de Inzunza (2017), para señala los aspectos teóricos permiten validar el enfoque frecuentista.

Al reflexionar sobre la actividad y la utilización del simulador, es importante destacar cómo, a partir de un problema propuesto mediante un modelo, se lleva a cabo su aplicación a la realidad. La premisa inicial consiste en determinar una cantidad de fichas, pero la verdadera finalidad es que las personas estudiantes comprendan la interrelación entre ambos enfoques de probabilidad. En este sentido, Sanabria y Núñez (2010) señalan que la utilización de un simulador es útil para mejorar la comprensión y aplicación de conceptos probabilísticos. Además, en la actividad propuesta, el simulador tiene un papel fundamental, dado que, mediante este, se puede realizar una cantidad considerable de extracciones de manera rápida y bajo las mismas condiciones, lo cual facilita el desarrollo del enfoque frecuentista (Yáñez y Jaimes, 2013). Además, permite mantener la incertidumbre de lo que hay en la bolsa y, aunque el orden visual de los colores infiere sobre las apuestas de las personas estudiantes, en un futuro puede ser un espacio para explorar las diferencias de los experimentos simultáneos.

Ahora bien, cuando se analizan las bases curriculares (MINEDUC, 2015), existe una desconexión entre la relación de la probabilidad frecuencial con la probabilidad teórica, pareciera que este aspecto frecuencial se asocia o se usa solo para introducir los experimentos aleatorios, o bien, que pertenecen al contenido de estadística de forma aislada al de las probabilidades, solo reduciéndose al cálculo de la frecuencia relativa y, por otra parte, mediante la regla de Laplace, se realizan cálculos de manera teórica, sin considerar su relación mediante la Ley de los grandes números, vinculando ambos enfoques.

El aporte a la educación matemática de esta investigación puede resumirse en varios aspectos claves que abarcan tanto el entendimiento teórico como el práctico de la probabilidad, así como la integración

de herramientas didácticas innovadoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Como primer aspecto importante, es la integración de enfoques probabilísticos que muestra cómo las personas estudiantes pueden vincularlos mediante el uso de un simulador en una situación didáctica. Este aporte es significativo porque demuestra que es posible facilitar la comprensión de la probabilidad al permitir que las personas estudiantes experimenten y observen cómo la probabilidad teórica y la frecuencia relativa se aproximan conforme se realizan más experimentos.

Un segundo aspecto importante es el uso de simuladores en el aprendizaje, dado que el simulador como herramienta didáctica es muy relevante, debido porque proporciona una forma dinámica y visual de experimentar con conceptos probabilísticos. Los simuladores les permiten a las personas estudiantes llevar a cabo extracciones repetidas de manera rápida y bajo las mismas condiciones, lo cual facilita el entendimiento del enfoque frecuentista. Además, este método ofrece una forma práctica de observar la convergencia entre la probabilidad teórica y la frecuencia relativa, enriqueciendo la experiencia de aprendizaje y haciendo uso de la tecnología en el aula.

Por último, otro aspecto relevante es la conexión curricular con la práctica docente. La investigación presenta una propuesta de enseñanza destinada a abordar la desconexión existente en las bases curriculares entre la probabilidad frecuencial y la teórica. Al enfrentar esta brecha y demostrar cómo el simulador puede ayudar a integrar ambos enfoques, se ofrece una solución práctica para complementar el currículo matemático. Esto puede guiar a las personas docentes en la implementación de estrategias que faciliten la construcción del conocimiento y promuevan una enseñanza más integral de la probabilidad.

Entre las limitaciones, se puede mencionar a los instrumentos de recolección de datos. En cuanto al registro audiovisual con la cámara panorámica, este ofrece una visión panorámica de la clase, lo cual facilita el poder observar la interacción de las personas estudiantes durante la sesión, así como el desarrollo del plenario y la institucionalización. Sin embargo, es necesario complementar con un registro audiovisual más detallado y específico de las parejas y los grupos de trabajo. Esto se debe a que, de manera particular, no se evidencia cómo el alumnado emite sus mensajes y afirmaciones conforme avanzan a través de las distintas fases de la situación didáctica. Tampoco se aprecia claramente cómo discuten y argumentan el desarrollo de sus estrategias, más allá de lo que se evidencia en sus hojas de trabajo, por lo cual el contemplar otro tipo de instrumento, que permita evidenciar el trabajo personalizado por fase de cada pareja de trabajo, podría ayudar a evidenciar con mayor precisión la fase de formulación y validación de la situación didáctica.

Por otra parte, al considerar una reformulación de la actividad, a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), es pertinente contemplar algunos cambios en relación con el medio. La problemática involucra dos simuladores en GeoGebra, siendo uno de ellos una extensión del otro, este último en su configuración permite realizar un mayor número de repeticiones del experimento. Para una exploración más profunda en cada una de las fases, es importante considerar ajustes en la cantidad de fichas de ambos colores e incluso la incorporación de más fichas. Esto modificaría el espacio muestral del experimento, y requeriría que, en las etapas de formulación y validación, el estudiantado no solo se base en argumentos intuitivos de probabilidad, sino que también utilice los enfoques frecuentistas y teóricos para validar sus afirmaciones. De esta manera, se podrían relacionar ambos enfoques de manera más efectiva dando respuesta a la problemática.

Por último, al considerar las proyecciones de la investigación en el área de datos y azar, y teniendo en cuenta la perspectiva de los significados de la probabilidad, es importante enfocarse en actividades que permitan explorar la construcción de estos significados, cómo se relacionan entre sí y de qué manera se hacen evidentes estas conexiones (Batanero *et al.*, 2005). Tomando como ejemplo las distribuciones de probabilidad, como la Binomial, a menudo se aborda su conceptualización desde la perspectiva de la distribución con sus parámetros, seguida del cálculo clásico de la esperanza y la varianza. No obstante, resultaría de gran interés considerar enfoques frecuenciales desde la distribución Bernoulli y analizar cómo se establecen las relaciones que contribuyen a la construcción de la distribución binomial.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. (2009). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 37-54.
- Batanero, C. y Sánchez, E. (2013). Atzar i probabilitat a l'Escola Primària. *Perspectiva escolar*, 370, 37-41.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer US.
- Binda, N. U. y Balbastre-Benavent, F. (2013). Investigación cuantitativa e investigación cualitativa: buscando las ventajas de las diferentes metodologías de investigación. *Revista de ciencias económicas*, 31(2), 179-187.
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa* (Vol. 1). Editorial La Muralla.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Galeano, M. E. (2003). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa*. Universidad Eafit.
- Gea, M., Parraguez, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267-276). SEIEM.
- Godino, J., Batanero, C. y Cañizares M. J. (1996). *Azar y probabilidad*. Editorial Síntesis.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill, Interamericana Editores.
- Inzunza, S. (2017). Conexiones entre las aproximaciones clásicas y frecuencial de la probabilidad en un ambiente de modelación computacional. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 69-86.
- Ireland, S. y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 339-370.
- Juárez, F. y Arellano, Y. (2021). Simulador de un modelo de urna para la probabilidad condicional en nivel básico. *Revista Electrónica AMIUTEM*, 9(2), 25-42.
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Ministerio de Educación de Chile.
- Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. En M. Panizza (Ed.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 59-72). Paidós.
- Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, 5, 13-66.
- Sanabria, G. y Núñez, F. (2010). Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. En *Memorias III Encuentro de Enseñanza de la Matemática UNED*. <https://www.uned.ac.cr/actividades/encuentros/2010/III%20Encuentro/ponencias/4p/43-P4%20N%C3%BAnez%20Felix%20y%20Sanabria%20Geovanni.pdf>
- Sanabria, G. y Núñez, F. (2017). La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 17(2), 1-13.
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado*, 19(2), 441-462.
- Yáñez, G. y Jaimes, É. (2013). Efectos de la simulación en la comprensión de la ley de los grandes números. *Revista Integración, temas de matemáticas*, 31(1), 69-86.