

El estudio de las integrales triples y de línea mediante aplicaciones físicas experimentales como un recurso didáctico

The study of triple and line integrals through experimental physical applications as a didactic resource

O estudo de integrais triplas e de linha por meio de aplicações físicas experimentais como recurso didático

Bolívar Alonso Ramírez Santamaría
Universidad de Costa Rica
San Ramón, Costa Rica
bolivar.ramirez@ucr.ac.cr

 ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-6087-8386>

Eduardo Alonso Arias Navarro
Universidad de Costa Rica
San Ramón, Costa Rica
eduardo.arias_n@ucr.ac.cr

 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8293-7686>

Recibido – Received – Recebido: 04/10/2023 Corregido – Revised – Revisado: 25/04/2024 Aceptado – Accepted – Aprovado: 06/05/2024

DOI: <https://doi.org/10.22458/ie.v26i41.4968>

URL: <https://revistas.uned.ac.cr/index.php/innovaciones/article/view/4968>

Resumen: Con el desarrollo de esta investigación, se llevaron a cabo dos talleres con actividades experimentales, adoptando un enfoque desde las aplicaciones físicas para abarcar el estudio de las integrales triples e integrales de línea en el contexto educativo. Estos talleres se diseñaron con el objetivo de explorar cómo la aplicación de conceptos físicos puede enriquecer y facilitar la comprensión de temas matemáticos avanzados. La investigación propuesta se enmarca en un estudio cuantitativo de laboratorio, que se medió a través de unas pruebas pretest y posttest, permitiendo evaluar la ganancia conceptual utilizando el método de Hake, así como realizar pruebas de hipótesis y análisis de parámetros estadísticos. Además de las evaluaciones cuantitativas, se empleó un diferencial semántico para medir aspectos relacionados con la actitud de los participantes hacia el aprendizaje de las integrales triples y de línea. Estos instrumentos de medición proporcionaron una visión integral del impacto de las actividades experimentales en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Los resultados obtenidos revelaron que las aplicaciones físicas experimentales pueden ser una estrategia pedagógica efectiva para enseñar y aprender conceptos avanzados de cálculo, como las integrales triples y de línea. Además, se evidenció su potencial para promover un aprendizaje más significativo y duradero para el estudiante, al proporcionar una comprensión más profunda y una mayor conexión con el mundo real de los fenómenos físicos. Estos hallazgos sugieren la importancia de integrar actividades experimentales en el proceso de enseñanza de las matemáticas, especialmente en áreas que requieren un enfoque más abstracto y teórico.

Palabras claves: Matemática, Integrales, Física, Laboratorio, Experimento, Aprendizaje.

Abstract: For this research, there were two workshops with experimental activities carried out with an approach from physical applications to cover the study of triple integrals and line integrals in an educational context. These workshops were designed to explore how the application of physical concepts can enrich and facilitate the understanding of advanced mathematical topics. The proposed research is framed as a quantitative laboratory study measured by pre- and post-tests to assess conceptual gain using Hake's method, hypothesis testing, and statistical parameter analysis. In addition to the quantitative assessments, a semantic differential was used to measure aspects related to participants' attitudes toward triple and line integral learning. These

measurement tools provided a comprehensive view of the impact of the experimental activities on the students' learning process. The results showed that experimental physics applications can be an effective pedagogical strategy for teaching and learning advanced calculus concepts such as triple and line integrals. In addition, their potential to promote more meaningful and lasting student learning by providing a deeper understanding and greater connection to the real world of physical phenomena was demonstrated. These findings suggest the importance of integrating experimental activities into the mathematics classroom, especially in areas that require a more abstract and theoretical approach.

Keywords: Mathematics, Integrals, Physics, Laboratory, Experiment, Learning.

Resumo: Com o desenvolvimento desta investigação foram realizadas duas aulas com atividades experimentais, adotando um enfoque de aplicações físicas para abranger o estudo de integrais triplas e integrais de linha no contexto educativo. Estas aulas foram concebidas com o objetivo de explorar como a aplicação de conceitos físicos pode enriquecer e facilitar a compreensão de tópicos matemáticos avançados. A investigação proposta faz parte de um estudo quantitativo de laboratório, que foi mensurado por meio de testes de pré e pós-teste, permitindo avaliar o ganho conceitual pelo método de Hake, bem como testes de hipóteses e análise de parâmetros estatísticos. Além das avaliações quantitativas, foi utilizado um diferencial semântico para mensurar aspectos relacionados à atitude dos participantes em relação à aprendizagem de integrais triplas e de linha. Esses instrumentos de medição proporcionaram uma visão abrangente do impacto das atividades experimentais no processo de aprendizagem dos estudantes. Os resultados obtidos revelaram que as aplicações físicas experimentais podem ser uma estratégia pedagógica eficaz para ensinar e aprender conceitos avançados de cálculo, como integrais triplas e de linha. Além disso, ficou evidente seu potencial para promover uma aprendizagem mais significativa e duradoura para o estudante, ao proporcionar uma compreensão mais profunda e uma maior conexão com o mundo real dos fenômenos físicos. Estas descobertas sugerem a importância da integração de atividades experimentais no processo de ensino de matemática, especialmente em áreas que requerem um enfoque mais abstrato e teórico.

Palavras-chave: Matemática, Integrais, Física, Laboratório, Experimento, Aprendizagem.

INTRODUCCIÓN

Actualmente existe una dificultad generalizada en el aprendizaje de la Matemática y una parte del problema se relaciona con la complejidad inherente que pueden presentar el estudio de algunos temas de esta ciencia, con la actitud de desinterés por parte de la población estudiantil y que el personal docente no plantea actividades basadas en situaciones específicas de resolución de problemas que tengan aplicaciones prácticas en la vida real o que estén relacionadas con el entorno estudiantil (Soto y Yogui, 2020). Es decir, el rendimiento académico podría afectarse negativamente por tres factores: la abstracción de algunos conceptos matemáticos suele ser de difícil aprendizaje para ciertos estudiantes y esto, a la vez, se le suma una actitud de apatía hacia la disciplina y una ausencia de compromiso docente por mejorar los procesos de mediación pedagógica.

Al respecto, si se hace hincapié en aquellos cursos donde se estudian temas avanzados de Matemática, como la integración en varias variables, ésta se suele presentar como teoría y ejemplos con resoluciones mecánicas, carente de significado, utilidad y relevancia en el mundo real. Más aún, existen aplicaciones físicas de ciertos contenidos de integración múltiple que no se exploran a profundidad y se podrían utilizar como un medio para facilitar y enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este sentido, y particularizando en las universidades públicas de Costa Rica donde se brindan carreras en el área Ingeniería y en el área de Educación Matemática, en los diseños curriculares de éstas en cuanto a aspectos de objetivos y contenidos de cálculo superior, se puede constatar la proposición anterior. Inclusive, en la bibliografía recomendada de estos programas suelen referenciarse textos como Apostol (2004), Pita (1995) y Stewart (2012), que en su desarrollo teórico incluyen las aplicaciones físicas de las integrales en varias variables, pero con propuestas mecánicas y vacías de significado pedagógico.

Esto es comprensible pues son obras que no necesariamente están dirigidas a procesos de enseñanza y aprendizaje de la física-matemática.

Sin embargo, es extensamente conocido que existe una relación estrecha entre la Matemática y la Física, por lo que es importante trabajar en nuevas estrategias didácticas que permitan precisamente la conexión interdisciplinaria entre las nuevas estructuras cognitivas adquiridas por los estudiantes de Matemática con aplicaciones físicas, propiciando así un aprendizaje más significativo de los contenidos estudiados (Costa et. al, 2008). Más aún, Arlego y Costa (2011) escriben que

Algunos investigadores proponen apartarse de la enseñanza clásica, mecanicista y técnica de esta disciplina. Expresan que, con esa forma de enseñar, el alumno no encuentra significados, ni vínculos con otras ciencias, a los conceptos matemáticos abstractos. Recomiendan acercarse a una enseñanza contextualizada, ligando los conceptos del cálculo con su génesis o contextualizándolos con problemas de la ingeniería o de la física. (p.94).

Propiamente en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial, donde se incluye los contenidos afines a integrales en varias variables, Colman et. al (2013) consideraron que la práctica docente se debe reflexionar ya que no es sencilla dada la complejidad de los temas y el requerimiento de un pensamiento matemático avanzado. Asimismo, estos autores acentúan la relevancia de relacionar los temas de estudios del Cálculo Vectorial con ejemplos concretos de la Física y la Ingeniería. En este sentido, Rodríguez (2011) puntualiza mencionando que

... la práctica diaria de la Física y la Ingeniería utilizan cantidades enormes de Matemática del más alto nivel y que la mayor parte del desarrollo de la Matemática en los últimos tres siglos tiene origen y motivación en el deseo de resolver problemas físicos. (p.40).

También, Rodríguez (2011) establece que la integración de la Matemática con otras disciplinas y áreas del conocimiento es fundamental para proporcionar a los estudiantes una visión holística y contextualizada de esta ciencia. La Matemática no existe en un vacío, sino que está intrínsecamente vinculada con otras áreas del saber, como la Física, la Ingeniería, la Economía, la Biología, entre otras. Mostrar estas conexiones en el aula de Matemática es esencial para ayudar a los estudiantes a comprender cómo la Matemática se aplica en diversos contextos y cómo contribuye al avance del desarrollo humano.

En vista de las ideas expuestas, el objetivo principal de este artículo es mostrar cómo las aplicaciones físicas experimentales, realizadas en un entorno de laboratorio, pueden ser clave como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados, específicamente en contenidos asociados a las integrales triples y de línea. La premisa subyacente es que este recurso didáctico tiene el potencial de facilitar un aprendizaje significativo y profundo de los contenidos estudiados.

Por lo tanto, el propósito es examinar cómo la implementación de actividades experimentales físicas puede enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre estos conceptos matemáticos complejos, al proporcionarles una experiencia práctica y tangible que les permita visualizar y experimentar directamente los principios matemáticos en acción. Se busca demostrar cómo la combinación de la teoría matemática con la práctica experimental física puede estimular un mayor compromiso y participación de estudiantado, al tiempo que promueve una comprensión más profunda y significativa de los conceptos.

Para avanzar con el propósito anteriormente mencionado, y previo a la descripción de los referentes teóricos, es fundamental sintetizar algunos estudios previos relacionados con el tema de investigación. Es importante destacar que las referencias revisadas corresponden a nivel internacional, ya que no se han encontrado trabajos pertinentes en el ámbito costarricense.

En orden cronológico, se inicia con los autores Castiblanco y Vizcaíno (2008). Ellos realizaron una reflexión donde enfatizan que diseñar una experiencia significativa de laboratorio implica revisar los intereses de los y las estudiantes, para lo cual indican que “La Física resulta ser un medio que ofrece de manera especial procedimientos y elementos de estudio realmente interesantes...” (p.72). De hecho, en sus conclusiones, establecen que las experiencias de laboratorio son un componente fundamental en la enseñanza de la Física. Estas experiencias no solo permiten a los estudiantes adquirir conocimientos y habilidades, sino también desarrollar una actitud científica y un interés por la ciencia. Asimismo, Castiblanco y Vizcaíno (2008) sugieren que las estrategias de enseñanza deben diseñarse para promover la participación de los estudiantes y desarrollar habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas.

Por su parte, Gazzola et al. (2015) llevaron a cabo una investigación codisciplinar a la Física y la Matemática en dos cursos de quinto año de secundaria y a pesar de las limitantes con las que se enfrentaron durante el estudio, los resultados obtenidos son positivos respecto de la receptividad de la población estudiantil al estudiar Física durante las clases de Matemática. Además, muestran cómo los conceptos físicos ayudan a dar sentido a algunos conceptos matemáticos y viceversa.

Aquilano et al. (2017) también desarrollaron un trabajo que permite articular temas de Matemática con temas de Física. Específicamente elaboraron una propuesta didáctica que vincula el análisis de una función de una variable desde la Matemática con los conceptos de cinemática, desde la Física. Dentro de sus resultados se destaca que un porcentaje muy alto de estudiantes les parece importante que se les brinden actividades donde se estudie la Matemática con situaciones experimentales físicas, e inclusive, esto les permitió mejorar la comprensión de los contenidos. Los autores concluyen que a partir de los resultados positivos que se obtuvieron, es importante implementar propuestas similares para otros temas matemáticos.

Asimismo, Silva y Campos (2019) realizaron un trabajo que consistió en desarrollar actividades teóricas y experimentales interdisciplinarias en el nivel de secundaria. Estos autores presentaron algunas reflexiones sobre la elaboración de conceptos matemáticos construidos en clase y durante la realización de experimentos físicos, mediada por la acción del docente. En síntesis, ellos hicieron dos experimentos: el primero consistió en observar el crecimiento de una columna de agua llena de flujo constante (en distintas velocidades) y donde los educandos debían anotar los tiempos en que la columna alcanzó ciertas marcas del tubo de acrílico y en forma de pares ordenados. El segundo fue sobre el desplazamiento de un objeto a lo largo de un tubo acrílico con agua como un primer caso y glicerina líquida como segundo caso. Además, debían escribir la información como pares ordenados y realizar las gráficas respectivas donde pudieran percibir las características, como la relación entre la velocidad del objeto que viaja a través del líquido contenido en el tubo y las pendientes.

Estos autores concluyeron que los experimentos físicos contribuyeron a los estudiantes a abstraer y construir propiedades del propio objeto de estudio. También, Silva y Campos (2019) insistieron en la importancia de que los docentes trabajen en propuestas pedagógicas que fomenten la participación significativa de la población estudiantil. En esta misma línea, Castro et al. (2020) desarrollaron una investigación que tiene como objetivo principal explorar una metodología innovadora para enseñar el concepto de integral definida en el contexto de la Física y la Geometría utilizando el experimento de la caja de arena. El experimento consistía en que los estudiantes partícipes llenaban la caja de arena con diferentes formas y luego miden el volumen de la arena utilizando una balanza. Este recurso permitió comprender de manera intuitiva el concepto de integral definida como la suma de áreas infinitesimales. Los autores sugieren que esta metodología puede ser útil para mejorar la enseñanza de la Matemática y promover un aprendizaje más activo y participativo en el aula.

Por último, Parra et al. (2021) efectuaron una investigación cuantitativa para caracterizar las percepciones que tienen los y las discentes de enseñanza media sobre la matematización en las clases de Física. Entre sus conclusiones, estos autores advierten que

... si bien los estudiantes reconocen la importancia de la Matemática para su proceso educativo, ellos consideran que esta asignatura se basa en aprender sólo fórmulas, reglas y procedimientos de cálculo, teniendo la percepción de que dichas clases son tediosas. (p.300).

Más aún, Parra et al. (2021) consideran la Física como Matemática aplicada, es decir, una extensión de la clase de Matemática, y subrayan la importancia de diseñar actividades educativas que reflejen esta relación íntima entre ambas disciplinas, proporcionando a los estudiantes una comprensión más profunda y significativa de los conceptos tanto matemáticos como físicos.

Por otro lado, los referentes teóricos de este estudio, como se mencionó en la introducción, se sustentan en la estrecha relación que existe entre la Matemática y la Física. De hecho, la Física utiliza la Matemática como herramienta fundamental para describir y predecir el comportamiento de los fenómenos físicos.

También, la Física ha sido una fuente de inspiración para el desarrollo de nuevas ramas de la Matemática. Para ejemplificarlo se pueden citar situaciones muy concretas: la construcción del cálculo diferencial e integral por parte de Newton, la aplicación de la Geometría no Euclidiana para plantear la relatividad especial por parte de Minkowsky (Soto, 2020), la propuesta de la ecuación de onda relativista por parte de Dirac (Vizcaino y Terrazan, 2015), entre otros. Pese a la complejidad de estas dos ciencias, ambas tienen sus raíces en la necesidad práctica y la curiosidad humana. Al respecto, Álvarez y Flores (2014) escriben que

... los números surgieron de la vivencia cotidiana de contar con los dedos de las manos y de la apreciación de la forma de los objetos manan las figuras geométricas. Asimismo, de la experiencia y el enfrentamiento del ser humano con los fenómenos naturales surge la física, necesariamente con las primeras explicaciones para la comprensión de la naturaleza. (p.100).

Más aún, estos autores mencionan que, en las civilizaciones antiguas, la religión y la mitología se usaban para explicar fenómenos naturales. Sin embargo, el surgimiento de la filosofía y la ciencia en la antigua Grecia llevó a un mayor énfasis en la observación y la razón en la búsqueda de explicaciones de estos fenómenos naturales. De hecho, es hasta el siglo VI antes de Cristo que la Física y la Matemática aparecen como actividades intelectuales formales, diferentes y al margen de actividades prácticas, hasta el punto de que han evolucionado a lo largo del tiempo para convertirse en herramientas fundamentales en la comprensión de la naturaleza y el universo que nos rodea.

Sobre ello, existen textos como Halstead (2010) y Leng (2012), que exploran la relación entre la Física moderna y la Matemática, y cómo juntas transforman la comprensión del mundo natural y la cultura humana. En esta premisa, el objetivo es aprovechar el complemento de estas dos ciencias como un insumo didáctico en los procesos educativos y en la resolución de problemas mediante experimentos físicos como estrategia para comprender significativamente los conceptos matemáticos estudiados.

En este sentido, si se les permite a los educandos aplicar los conocimientos matemáticos adquiridos en un contexto práctico, experimental y relevante, ayudará a consolidar la comprensión de los conceptos y su aplicación en situaciones reales. Además, la resolución de problemas puede fomentar el pensamiento crítico, la creatividad y la capacidad de análisis y síntesis de los estudiantes, ya que les brinda la oportunidad de enfrentarse a situaciones nuevas y complejas y buscar soluciones efectivas. De hecho, Espinoza (2017), considera que la resolución de problemas

... promueve el desarrollo de habilidades, destrezas y diversas competencias matemáticas que le serán útiles a los estudiantes en su vida cotidiana. Esto porque se enfrentan a un problema que les plantea una serie de retos y dificultades; sin embargo, al resolverlo, con la ayuda del docente y el empleo de sus habilidades y conocimientos previos, logran asimilar nuevas habilidades, conocimientos y competencias. (p. 69).

Es decir, cuando los estudiantes resuelven problemas, tienen la oportunidad de aplicar los conocimientos matemáticos que han aprendido, esto a su vez les permite ver la utilidad de las Matemáticas en la vida cotidiana e inclusive en otras áreas del conocimiento como lo es la Física. Es importante destacar que la resolución de problemas no solo contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas, sino que también puede fomentar el desarrollo de habilidades sociales y emocionales, como la capacidad para trabajar en equipo, la autoconfianza y la perseverancia. Esto se debe a que, al resolver problemas, los estudiantes se enfrentan a situaciones desafiantes que les exigen aplicar sus habilidades y conocimientos de manera efectiva, lo que les ayuda a desarrollar su autoestima y confianza en sus propias capacidades (Chandía et al., 2022).

Sin embargo, a pesar de las bondades de la resolución de problemas mediante actividades de experimentación como recurso didáctico, y como se fundamentó en la introducción, en el campo de la Enseñanza de la Matemática y de la Física, es frecuente que se aborden los contenidos de manera abstracta, sin darles la debida importancia como herramientas esenciales para la resolución de problemas científicos (Parra et al., 2021). Por ejemplo, se explica cómo resolver integrales, pero no se profundiza en por qué se deben resolver o cuál es su aplicación en el mundo de la Física.

MATERIALES Y MÉTODOS

La propuesta de investigación se desarrolló con un enfoque cuantitativo y se consideró como un tipo de investigación de laboratorio que, en referencia a Ruiz (2012), este diseño se realiza en el lugar de trabajo con el fin de optimizar los recursos y tiempo para disponer de un mejor control para el estudio.

De esta manera, con este diseño se pretendió analizar los datos mediante técnicas estadísticas descriptivos y metodologías activas ante la implementación de talleres con aplicaciones físicas en contenidos matemáticos.

El desarrollo de esta investigación se centró en la Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente, durante el segundo ciclo del año 2022 y en el grupo 01 del curso Principios de Análisis II, sigla MA-0551, que forma parte del octavo ciclo del plan de estudios de la carrera de Licenciatura y Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática. En este curso se estudiaron los conceptos de integrales en varias variables en un nivel elemental e intermedio, más específicamente: integrales dobles, integrales triples, integrales de línea e integrales de superficie, así como algunos teoremas clásicos como el Teorema de Green, Teorema de la Divergencia y el Teorema de Stokes. Se aclara que la persona docente titular del curso de Principios de Análisis II, sigla MA-0551, llevó a cabo las clases de forma clásica: explicación de la teoría, ejemplos y prácticas al respecto, sin profundizar en las aplicaciones físicas de estos. Sin embargo, para los contenidos de integrales triples e integrales de línea se diseñaron y realizaron dos talleres en el laboratorio de Física de la Sede Occidente de la Universidad de Costa Rica, donde los educandos participantes desarrollaron una serie de experimentos físicos como un recurso didáctico y que contemplaban la teoría estudiada en clase.

También, es importante aclarar que el curso supra citado contó con una matrícula de 25 estudiantes, donde se registró únicamente a los estudiantes que realizaron las actividades propuestas de forma completa, lo que representó una muestra de 22 estudiantes ($n = 22$) para el taller del tópico sobre integrales triples y de 23 estudiantes ($n = 23$) para el taller del tópico sobre integrales de línea.

Para llevar a cabo el proceso investigativo se implementó el instrumento de una prueba de estabilidad pretest y postest, con el fin de realizar una medición cuantitativa en dos momentos, uno previo a cada taller y otra prueba posterior a la actividad. Las pruebas fueron conformadas por 5 ítems adaptados de libros de texto en cálculo en varias variables y validados por profesores de la Sección de Matemática de la universidad, donde posteriormente fueron configuradas por medio de una plataforma de Moodle, con un tiempo estimado de 30 minutos y condicionado a un solo intento, con preguntas y respuestas aleatorizadas para garantizar una mayor variabilidad y confianza durante la aplicación de la población estudiantil.

Por otra parte se consideró el instrumento del diferencial semántico (Tabla 1) propuesto por Osgood, Suci y Tannenbaum en 1957 (Cervantes, 2019), para cuantificar un nivel de significancia de cada taller por medio de actitudes que se basan en adjetivos que son considerados como enunciados para ser tabulados por medio de una escala de intervalos de $[-3,3]$, con el fin de realizar un recuento de frecuencias de respuestas por análisis factorial, en donde se establece una comparación de significados de dos conceptos a un mismo sujeto para establecer un espacio semántico de las actitudes de la población en la actividad propuesta.

Tabla 1

Instrumento de Diferencial Semántico para medición de actitudes en talleres.

Desagradable	-3	-2	-1	0	1	2	3	Agradable
Aburrido	-3	-2	-1	0	1	2	3	Divertido
Indiferente	-3	-2	-1	0	1	2	3	Interesante
Difícil	-3	-2	-1	0	1	2	3	Fácil
El tiempo dedicado no es adecuado	-3	-2	-1	0	1	2	3	El tiempo dedicado es adecuado
No se entiende las instrucciones	-3	-2	-1	0	1	2	3	Las instrucciones son entendibles
No mejora comprensión de los talleres	-3	-2	-1	0	1	2	3	Mejora comprensión de los talleres

Nota: El Diferencial Semántico fue propuesto por Osgood, Suci y Tannenbaum en 1957 para medir actitudes y significados de actividades de talleres. Fuente: Tomado de Cervantes (2019).

El uso de herramientas estadísticas permite dar nociones o argumentos concluyentes para validar resultados sin sesgos o apreciaciones subjetivas, por ende, con la prueba pretest y postest se analizó el uso de datos descriptivos como la media, la desviación estándar, los cuartiles y los valores mínimos o máximos, que son importantes para procesar y fundamentar los resultados del tratamiento educativo empleado. Además, se implementó como prueba de hipótesis de la familia paramétrica, la prueba t , misma que fue analizada mediante el software Minitab® con un grado de confianza del 95%, es decir, un valor de significancia de $\alpha = 0.05$ con una cola a fin de establecer una hipótesis nula y alternativa:

H_0 equivale a que los resultados del postest no son mayores a los resultados del pretest.

Ha equivale a que os resultados del postest son mayores a los resultados del pretest.

Por otra parte, se utilizó el factor de ganancia establecido por Hake (1998), para hacer una comparativa de la ganancia conceptual a un grupo de estudiantes en un tratamiento educativo mediante pruebas de pretest y postest.

De esta manera, el factor de ganancia, denotado por g , se establece con un criterio de valores comprendido en un intervalo de $[0,1]$, donde se calcula a través de la siguiente expresión:

$$g = \frac{\% \text{ postest} - \% \text{ pretest}}{10 - \% \text{ pretest}} \quad \text{Ecuación (1)}$$

Con esto, Hake (1998) determina la ganancia obtenida en tres zonas que se describen como:

- Zona de ganancia alta: si el factor de Hake cumple que $g \geq 0.7$.
- Zona de ganancia media: si el factor de Hake cumple que $0.3 \leq g < 0.7$.
- Zona de ganancia baja: si el factor de Hake cumple con $g < 0.3$.

Para el estudio de los tópicos de integrales triples e integrales de línea como aplicaciones físicas se desarrolló inicialmente una sesión magistral en la que se abordó los contenidos con la formalidad matemática que exige este curso, luego se dividió el grupo en dos para cumplir con la cantidad de aforo máxima que dispone el Laboratorio de Física de la Universidad de Costa Rica, Sede Occidente, que corresponde a 18 estudiantes. La Figura 1 contiene parte de la esquematización de modelos en forma de ejemplos que se abordaron en los talleres.

Figura 1

Ilustración de aplicaciones físicas a partir de conceptos matemáticos

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_e^f \left(\int_c^b \int_a^b f(x, y, z) dx dy \right) dz. \quad \rho \int_Q dV = \rho \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \right) d\theta \right) r dr.$$

Integración triple de paralelepípedos rectangulares en

Aplicación física: Cálculo del momento de Inercia de una esfera rellena

$$\oint_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

$$W_{ab} = \int_a^b F \cdot dr.$$

Integral de línea sobre un campo vectorial

Aplicación física: Concepto de trabajo

Nota: Los formalismos matemáticos y aplicaciones son basados como ejemplos de ilustración.

Para cada taller se dispuso de un tiempo estimado de 90 minutos, donde se suministró un documento con instrucciones generales, los objetivos de aprendizaje, el formalismo matemático del tema y el procedimiento de las aplicaciones físicas que se realizaron en el laboratorio. De esta manera, por cada tópico del taller los estudiantes realizaron las siguientes aplicaciones:

- Integrales triples: este estudio se enfocó en determinar el momento de inercia en sólidos mediante el principio de conservación de la energía en un plano inclinado. Se llevaron a cabo diferentes experiencias utilizando distintos sólidos, como un anillo, una esfera rellena, una esfera hueca y un cilindro, con el objetivo de que los estudiantes pudieran interpretar cómo varía la energía potencial con la altura y compararla con la energía cinética de traslación y rotación al dejarlos rodar. De esta manera, se determinó experimentalmente el momento de inercia de cada sólido geométrico. Posteriormente, los estudiantes compararon sus resultados experimentales con los cálculos

teóricos del momento de inercia obtenidos a través de integrales triples. Este enfoque permitió fomentar una comprensión reflexiva de cómo los sistemas energéticos, como aplicaciones físicas, se relacionan con la importancia de un formalismo matemático.

- **Integrales de línea:** para esta actividad, se exploró el concepto de trabajo utilizando tanto el método gráfico, a través del teorema trabajo-energía, como el enfoque de sistema masa-resorte, utilizando un carro en movimiento monitoreado por un sensor de fuerza y otro de movimiento. Los estudiantes participantes activaban un mecanismo integrado en el equipo para comprimir un resorte con el carro dinámico. Al liberarlo, el carro se deslizaba sobre un riel plano, permitiendo a los sensores de movimiento y fuerza registrar datos mediante una interfaz gráfica con la tendencia de este comportamiento. Posteriormente, los estudiantes utilizaban un software especializado para calcular el área bajo la curva (trabajo neto) e identificar el punto de velocidad final del recorrido, lo que les permitía cuantificar la energía cinética y establecer una relación entre el trabajo realizado y la energía transferida, aplicando así el teorema trabajo-energía.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como parte de los instrumentos aplicados en los talleres para el curso Principios de Análisis II, sigla MA-0551, a continuación, se presentan los resultados obtenidos por la muestra de estudiantes que participó del proceso investigativo, en la que se destaca el análisis de resultados generados a partir de la prueba de estabilidad pretest, postest y el instrumento de diferencial semántico. Uno de los hallazgos más significativos de este estudio es la observación de una mejora notable en el aprendizaje de los estudiantes de Matemáticas cuando se integran aplicaciones físicas en el proceso educativo. Esta mejora se evidencia especialmente a través de la implementación de talleres que involucran experimentación en sistemas mecánicos y el análisis de datos empíricos.

En la Tabla 2 se presentan los resultados estadísticos más notorios y generados a partir de la implementación del taller de integrales triples e integrales de línea. Para ello, se destaca que la diferencia de las medias entre pretest y postest fue de 0,96 puntos y 2,09 puntos respectivamente en cada taller, lo que representa cambios de baja en la desviación estándar hacia las pruebas de tipo postest con 0,62 y 0,66 respectivamente, lo que atribuye una menor dispersión de los datos respecto al promedio, siendo este un resultado óptimo.

Este mismo hecho, es coherente si se considera las tendencias del cuartil uno, donde los pretest quedan en un rango del 80%, mientras que el grado de concentración y distribución del tercer cuartil abarca un valor predominante del 100% en ambos talleres, valores que implican una notable mejoría al caso de las pruebas del postest, mismas que son vinculantes con las medianas que registran notas de excelencia para validar que la aplicación de este tipo de actividades fueron de carácter significativo para el proceso de enseñanza y aprendizaje de integrales triples e integrales de línea.

Tabla 2

Estadísticos descriptivos para el pretest y el postest aplicado en los talleres.

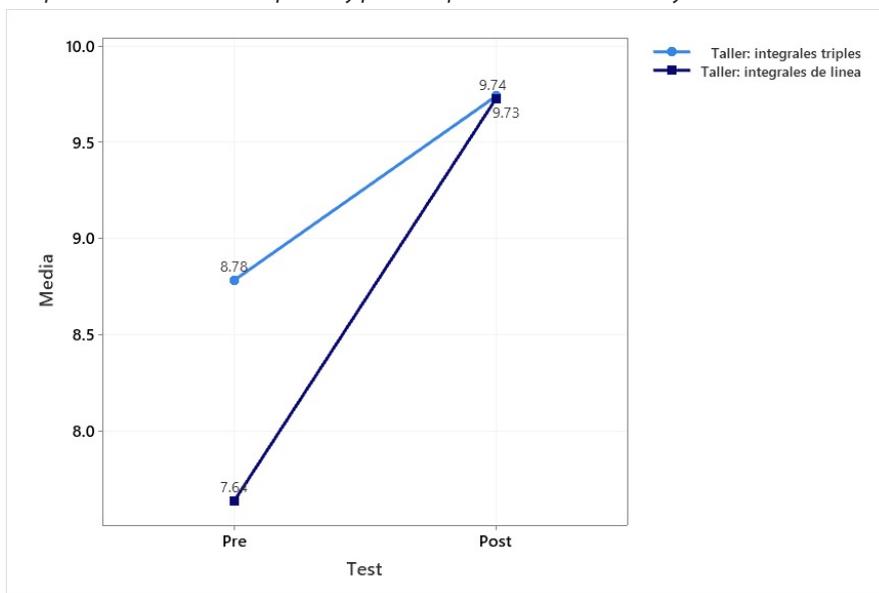
Taller		Prueba	Número de población	Media	Error estándar de la media	Desviación estándar	Nota Mínima	Q1	Mediana	Q3	Nota Máxima
Número	Nombre										
1	Integrales triples	Pre test	23	8,78	0,27	1,31	6,00	8,0	8,0	10	10
		Pos test	23	9,74	0,14	0,69	8,00	10	10	10	10
2	Integrales de línea	Pre test	22	7,64	0,34	1,59	2,0	8,0	8,0	8,0	10
		Pos test	22	9,73	0,20	0,93	6,0	10	10	10	10

Nota: Los resultados se basan en la aplicación del pretest y postest de la población. Fuente: Elaboración propia

Al considerar los descriptivos estadísticos de la media en ambos talleres, es notorio una importante mejora, misma que de acuerdo con la Figura 2, se presentó unas tendencias con aumentos significativos de 1,11% y 1,27% de la nota previa a la posterior y muy estrechamente cercanas a la escala de nota perfecta de 10.

Figura 2

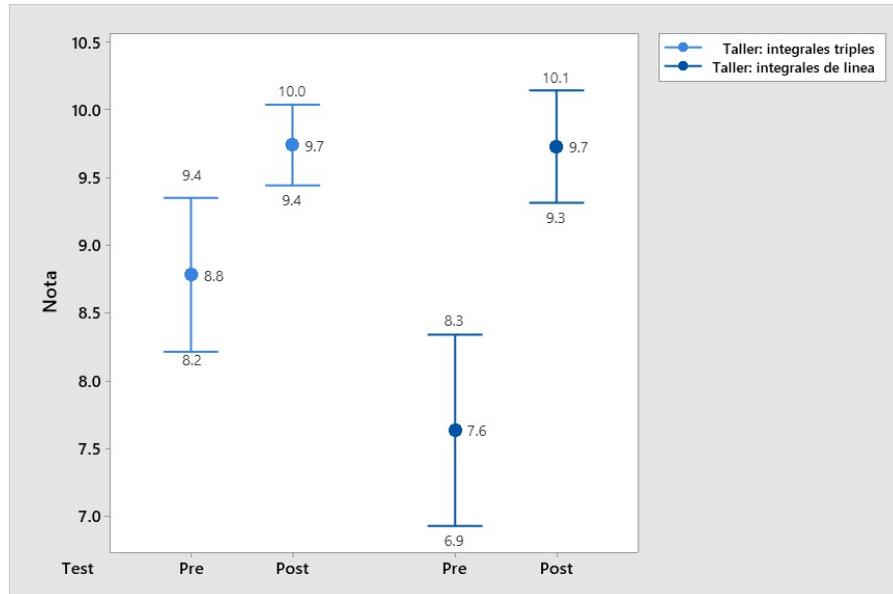
Tendencia para valores medios del pretest y postest aplicado en los talleres 1 y 2.



Nota: Los resultados corresponden a valores medios obtenidos de la población que aplicó el pretest y el postest. Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con la Figura 3, estos valores de medias, además de implicar en notorios aumentos de las pruebas postest, evidenciaron que su tendencia de intervalos no presenta dispersión, de forma que las medianas mantienen una leve variación de diferencia que oscila de 0,3 a 0,7 puntos, lo que incide en datos bien concentrados en sus valores medios.

Figura 3
Valores de intervalos para pretest y postest en los talleres.



Nota: Los resultados de intervalos permiten evidenciar tendencias de frontera para el pretest y postest de los talleres.
Fuente: Elaboración propia.

Respecto al análisis de prueba de hipótesis, se consideró la prueba con una cola, en la que se evidenció un característico de con la condición de según se aprecia en la Tabla 3. Con ello, se infirió un rechazo a la hipótesis nula y se consolidó la hipótesis alternativa tanto para el taller de integrales triples, así como el de integrales de línea en la que se demuestra un resultado significativo y con mejoría del postest en comparación al pretest. De esta forma, la prueba estadística ratifica que la implementación de actividades con aplicaciones en contenidos de matemática, son favorables para los estudiantes en el proceso educativo.

Tabla 3

Prueba t aplicada para el pretest y es postest en los talleres 1 y 2.

Taller	Diferencia	Valor T	Valor P	Hipótesis
2	-1,53	-3,45	0,002	Rechaza nula
3	-2,52	-10,1	0,000	Rechaza nula

H_0 = Los resultados de la postest no son mayores a los resultados en el pretest,
 $p = 0,05$

Nota: El análisis de prueba paramétrica es del 95% de confianza, es decir con significancia de $\alpha = 0.05$. Fuente: Elaboración propia.

Por su parte, el factor de ganancia conceptual de Hake (1998) pretende como modelo estadístico establecer una ganancia conceptual luego de haber aplicado una propuesta didáctica y con ello verificar si la misma ha sido efectiva (Arias, 2021). Según se describe en la Tabla 4, los valores obtenidos de en el taller de integrales triples y de línea superan el límite de 0,7 que destaca la zona de ganancia alta, ello implica que la medida obtenida es alta, con gran significancia y persigue una efectividad en la comprensión de los contenidos estudiados.

Tabla 4

Factor de ganancia conceptual de Hake aplicada en los talleres.

Taller	Nota media pretest	Nota media postest	Factor de Hake
2	8,78	9,74	0,79
3	7,64	9,73	0,86

Nota: La ganancia conceptual de Hake a partir del pretest y postest. Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, al considerar el instrumento del diferencial semántico, se establece una serie de actitudes que el estudiantado puede ofrecer en cuanto a la implementación de los talleres. En esa línea, es notable destacar que los resultados obtenidos en la Tabla 5 presentan una frecuencia media que oscila en valores positivos comprendidos en , lo que incide directamente en matizaciones de aptitudes de los estudiantes centrados en adjetivos o argumentos positivos.

De igual forma, en los resultados de la Tabla 5 se encontró que los argumentos de E.1, E.3 y E.2 respectivamente sobresalieron con valores cercanos a 3 en ambos talleres, lo que demostró que para el estudiante este tipo de recursos didácticos son espacios amenos y también promueven el sentido creativo para la mejora del aprendizaje.

En otra posición, los E.4 y E.5 destacan como las actitudes menos sobresalientes con apenas valores que oscilaron entre , son los resultados menos favorables, puesto que hay estudiantes que siguen considerando estos espacios con grados de dificultad, debido a que consideran que estos tópicos siguen presentando niveles de complejidad en cuanto a la estrategia de resolución de problemas y a su vez el espacio de tiempo destinado para los talleres se consideró escaso, por lo que se debe valorar fortalecer más los tiempos de estas actividades para que en futuras talleres se solvete esta carencia.

Por lo tanto, mediante el diferencial, se estableció que el estudiantado aceptó en un 82% y 88% (ver E.7 de la Tabla 5) que para el taller 1 y 2 se logró comprender los tópicos de estudio requeridos en el curso y con esto se identificó una vez más que la implementación de actividades con aplicaciones físicas puede proveer importantes mejorías al proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de las Matemáticas.

Tabla 5

Diferencial semántico con la implementación del taller de integrales triples y de línea.

Número de enunciado	Argumento	Taller 1 Frecuencias medidas	Taller 2 Frecuencias medidas
E.1	Desagradable / Agradable	2,6	2,9
E.2	Aburrido / Divertido	2,6	2,8
E.3	Indiferente / Interesante	2,8	2,9
E.4	Difícil / Fácil	0,6	1,9
E.5	El tiempo dedicado no es adecuado / El tiempo dedicado es adecuado	1,1	2,7
E.6	No se entiende las instrucciones / Las instrucciones son entendibles	1,9	1,7
E.7	No mejora comprensión de los talleres / Mejora comprensión de los talleres	1,8	2,2

Nota: Los resultados de valoración del diferencial semántico se basa en la población que realizaron el taller de integrales triples y de línea. Fuente: Elaboración propia.

Como parte de las actividades realizadas, en la Figura 4 se documentó en forma de collage algunas de las experiencias realizadas en el laboratorio de física, donde los estudiantes participaron activamente en la construcción de los conceptos matemáticos mediados a través de las aplicaciones físicas que se abordaron con el taller de integrales triples e integrales de línea.

Figura 4 Collage de experiencia de estudiantes con el desarrollo del taller de integrales triples.



Nota: Desarrollo de experiencia con el taller de integrales triples desarrollado en el laboratorio de física. Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, gracias al desarrollo de este proceso investigativo a través de los diferentes análisis realizados, se infiere que la implementación de actividades como las realizadas en este tipo de talleres con aplicaciones físicas experimentales son favorables y enriquecedoras como recurso didáctico para generar mejores escenarios al proceso educativo en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

CONCLUSIONES

Al examinar detenidamente el desarrollo de esta investigación, es importante resaltar algunos aspectos significativos que contribuyen a una conclusión favorable hacia la implementación de actividades similares a las descritas en este estudio. Estas actividades no solo han demostrado ser efectivas en este contexto particular, sino que también ofrecen un potencial prometedor para ser aplicadas en nuevas investigaciones y diversos entornos educativos.

La prueba con un grado de confianza del 95%, delimitó un valor de χ^2 y para el taller de integrales triples y de línea, respectivamente, lo que permitió descartar la hipótesis nula y con ello establecer que después de realizar un pretest y un posttest, se encontró que las notas mejoraron en el posttest. Desde esta observación y los resultados obtenidos, se concluye que las aplicaciones físicas mediante actividades experimentales son recursos didácticos beneficiosos para el aprendizaje en el área de los contenidos matemáticos estudiados. Estas actividades proporcionan a la población estudiantil una experiencia

práctica y tangible que les permite conectar los conceptos matemáticos abstractos con fenómenos físicos reales, lo que facilita una comprensión más profunda y significativa de estos.

Además, al involucrar a los estudiantes en la experimentación y la exploración activa, estas actividades promueven un aprendizaje más activo, participativo y duradero. Por lo tanto, se recomienda integrar este enfoque de enseñanza en el aula para mejorar el proceso de aprendizaje y fomentar un mayor interés y compromiso por parte de los estudiantes en el estudio de las matemáticas.

Por su parte, el factor de Hake (1998) presentó ganancias conceptuales de 0,79 y 0,86, catalogadas como zonas altas para determinar que mediante este modelo estadístico ambos talleres cumplen con el enfoque de que el proceso inicial se ha visto potenciado a mejorar luego del tratamiento educativo implementado por Dellwo (2010). Es importante destacar que la ganancia conceptual no se limita solo al aumento en el conocimiento teórico de las integrales triples y de línea, sino que también puede incluir una comprensión más profunda del concepto debido a la capacidad de aplicar el conocimiento en algunos contextos físicos.

Asimismo, la técnica del diferencial semántico ha permitido calificar la implementación de los talleres realizados mediante una evaluación comparativa por conceptos de percepción bipolar Pérez et al. (2008), en la que sobresalen matizaciones que centran sus valores en tendencias positivas (ver Tabla 5). En otras palabras, la aplicación de la técnica del diferencial semántico en la evaluación de talleres resalta la percepción positiva de los participantes hacia las actividades experimentales físicas, destacando su efectividad para promover el compromiso y la motivación en el aprendizaje. Esto subraya la importancia de integrar, en la medida de lo posible, enfoques prácticos y experienciales en el diseño de actividades educativas para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje en temas complejos en el campo de la Matemática.

Finalmente, las declaraciones anteriores fomentan la conclusión de que las actividades experimentales que relacionan la Matemática con aplicaciones físicas pueden ayudar a los estudiantes a comprender y a aplicar conceptos matemáticos de manera más efectiva y por medio de un aprendizaje significativo, sin embargo, es importante destacar que la efectividad de esta estrategia depende en gran medida de la calidad del diseño de las actividades experimentales y de la forma en que se integren con el contenido matemático. Además, no todos los conceptos matemáticos pueden enseñarse de esta manera, ya que es necesario un equilibrio entre las aplicaciones prácticas y la comprensión teórica.

REFERENCIAS

- Álvarez, J., & Flores, D. (2014). La relación entre física y matemáticas a lo largo de la historia de Pitágoras a Galileo (parte I). *Ciencias*, (113-114), 98-113.
- Apostol, T. (2004). *Calculus. Volumen II. (2da. Ed.)*. Barcelona: Reverté S.A.
- Aquilano, L., Devece, E., Tooroba, P. & Trípoli, N. (2017, 14 de noviembre). Una propuesta didáctica que articula contenidos de Matemática y Física [Ponencia]. IV Jornadas de Investigación, Transferencia y Extensión de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata. La Plata, Argentina. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/60059>
- Arias, E. (2021). Una propuesta didáctica experimental aplicada a la unidad Electricidad en un colegio científico de Costa Rica. *Revista De Enseñanza De La Física*, 33(2), 55–62. <https://doi.org/10.55767/2451.6007.v33.n2.35175>
- Arlego, M., & Costa, V. (2011, noviembre). Enseñanza del cálculo vectorial en el contexto de la ingeniería: una revisión bibliográfica [Ponencia]. I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias

- y la Matemática. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (pp. 123-130). Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/121780>
- Castiblanco, L., & Vizcaíno, D. (2008). La experiencia del Laboratorio en la Enseñanza de la Física. *Revista Educación en Ingeniería*, 3(5), 68-74. <https://doi.org/10.26507/rei.v3n5.151>
- Castro, E., López, M., & Pérez, J. (2020). Enseñanza de la integral definida mediante el experimento de la caja de arena. *Revista de Educación en Matemática*, 22(2), 123-145.
- Cervantes, J. (2019) Efecto fotoeléctrico y divisor de voltaje, su aprendizaje bajo la metodología ISLE [Tesis de Doctorado, Instituto Politécnico Nacional]
- Chandía, E., Huencho, A., Pérez, C., Ortiz, A., & Cerda, G. (2022). Habilidades cognitivas y sociales en la resolución de problemas matemáticos de forma colaborativa. *Uniciencia*, 36(1), 1-26. <https://doi.org/10.15359/ru.36/1.50>
- Colman, J., Costa, V. y Landerreche, F. (2013, mayo). El Cálculo Vectorial en la formación del ingeniero aeronáutico: una perspectiva de alumnos del último año de la carrera [Ponencia]. II Jornadas de Investigación y Transferencia de la Facultad de Ingeniería (pp. 123-130). Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/37779>
- Costa, V., Di Domenicantonio, R., Prodanoff, F., Tolosa, E., & Guarepi, V. (2008, septiembre). Acciones interdisciplinarias entre matemática y física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial [Ponencia]. VI Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Facultad de Ingeniería e Informática, de la Universidad Católica de Salta y Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. Editorial de la Universidad Nacional de Salta. Buenos Aires, Argentina. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/37779>
- Dellwo, D. R. (2010). Course assessment using multi-stage pre/post testing and the components of normalized change. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, 10(1), 55-67. [citeulike-articleid:13170704%5Cnhttp://josotl.indiana.edu/article/viewFile/1732/1730](http://citelike-articleid:13170704%5Cnhttp://josotl.indiana.edu/article/viewFile/1732/1730)
- Espinoza, J., (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas*, 3(39), 64-79.
- Gazzola, M., Otero, M., Llanos, V., & Arlego, M. (2015). Enseñanza codisciplinar en Física y Matemática en la Escuela Secundaria por medio de Recorridos de Estudio y de Investigación. *Revista De Enseñanza de la Física*, 27(2), 117-124. <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/revistaEF/article/view/12593>
- Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 66(1), 64-74. <https://doi.org/10.1119/1.18809>
- Halstead, J. (2010). La conexión divina: cómo la física moderna y la matemática explican la naturaleza y la cultura. Ediciones Paidós.
- Leng, M. (2012). Las matemáticas y la realidad: Cómo las matemáticas dan forma al mundo físico. Editorial Crítica.
- Parra, V., Vanegas, C., & Bustamante, D. (2021). La clase de física es una extensión de la clase de matemática: percepciones de estudiantes de enseñanza media sobre la enseñanza de la física. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 47(3), 291-302. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052021000300291>
- Perez Ortega, G., Arango Serna, M, & Branch Bedoya, J. (2008). El semántico diferencial como propuesta metodológica para caracterizar el liderazgo en una organización. *Dyna*, 75(155), 15-27.
- Pita, C. (1995). *Cálculo Vectorial*. (1er. Ed.). Juárez: Prentice Hall Hispanoamérica S.A.
- Ramírez, B. (2020). *Introducción al cálculo en varias variables*. San Ramón, Alajuela: Coordinación de Investigación, Sede Occidente, Universidad de Costa Rica.

- Rodríguez, E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 35-49.
- Ruiz, H. (2012). *Metodología de la investigación con enfoque en competencias*. México D.F: CENGAGE Learnig, 2012.
- Silva, R. S. da, & Campos, L. (2019). Experimentos físicos na aula de matemática: eflexões sobre um Ateliê de Matemática no Ensino Fundamental. *Revista Educar Mais*, 4(1), 57-75. <https://doi.org/10.15536/reducarmais.4.2020.57-75.1661>
- Soto Quiroz, R., & Yogui Takaesu, D. (2020). Análisis de las dificultades que presentan los estudiantes universitarios en matemática básica. *Apuntes Universitarios*, 10(2), 1-16. <https://doi.org/10.17162/au.v10i2.433>
- Soto, C. (2020). Wigner, las leyes físicas y la efectividad de las matemáticas. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*, 20(40), 93-127. <https://doi.org/10.18270/rcfc.v20i40.3233>
- Stewart, J. (2012). *Cálculo Multivariable*. (7ma. Ed.). México, D.F.: Thomson Learning.
- Vizcaino, D., & Terrazzan, E. (2015). Diferencias trascendentales entre matematización de la física y matematización para la enseñanza de la física. *Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología -Tecné, Episteme y Didaxis*, 38, 95-111.