



# Evaluación sumativa para la resolución de problemas en el área de Geometría

Marianela Zumbado-Castro

*Académica de la Cátedra Didáctica de la Matemática, Escuela de Ciencias de la Educación, Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica; mazumbado@uned.ac.cr*  
 <https://orcid.org/0000-0002-5774-1884>

**Recibido:** 15 de mayo del 2019

**Corregido:** 08 de julio del 2019

**Aceptado:** 20 de agosto del 2019

## Resumen

El presente artículo procura una respuesta a la siguiente interrogante ¿cómo evaluar de manera sumativa a los estudiantes cuando resuelven problemas de Geometría?, explorar las ideas a nivel internacional que aportan insumos a una propuesta evaluativa acorde con el MEP (2012). El proceso para conseguir lo deseado fue una investigación bibliográfica, a través de la cual se seleccionaron artículos con sólido respaldo teórico que abordan de manera simultánea tres tópicos: Geometría, resolución de problemas y evaluación de los aprendizajes, usando como criterio de discriminación similitudes con la fundamentación teórica de los programas de Matemáticas costarricense y excluyendo aquellos textos que no ofrecieran ejemplos concretos de sus propuestas. Para el análisis, la información se organizó de manera deductiva, partiendo de los elementos generales de la evaluación en educación matemática hasta las propuestas para temas específicos del área de Geometría. Dentro de los hallazgos más destacados se encuentran que la comunidad internacional realiza investigación en este campo y ha recurrido a diversas técnicas como el grupo focal, el análisis de HTE, el juicio de expertos y la entrevista cognitiva, para validar las herramientas generadas entre las que se encuentran las rúbricas, los ítems de selección múltiple y las respuesta construida, sobre temáticas como la visualización espacial, la descomposición y la composición de figuras. Se destaca que los procesos matemáticos se deben incluir en los instrumentos para evaluar el conocimientos de los estudiantes, pues permiten aproximar las competencias relacionadas con las Matemáticas.

**Palabras clave:** Aprendizaje; enseñanza de las Matemáticas; Geometría; estrategia de enseñanza; evaluación.

## Abstract

### Summative evaluation for solving problems in the area of Geometry

This article attempts to answer the following question: How to evaluate students in a summative way when they solve Geometry problems? and intends to explore the ideas of some researchers at international level who contribute inputs to an evaluation proposal in accordance with the MEP (2012). The process to achieve the above was a bibliographic investigation, through which articles with solid theoretical backing were selected that simultaneously addressed three topics: Geometry, problem solving and evaluation of learning, using similarities with the discrimination criteria theoretical foundation of the Costa Rican Mathematics programs and excluding those texts that did not offer concrete examples of their theoretical proposals. For the analysis of the information, it was organized in a deductive way, starting from the general elements of the evaluation in Mathematical Education until the proposals for specific topics of the Geometry area. Among the most outstanding findings are that the international community is conducting research in this field and has resorted to techniques such as focus group, HTE analysis, expert judgment and cognitive interview, to validate the tools generated among which are the rubrics, items of multiple selection and constructed response, on topics

such as spatial visualization, decomposition and composition of figures. Among the conclusions, it is highlighted that the mathematical processes must be included in the instruments to evaluate the students' knowledge, because they allow to approximate the competences related to Mathematics.

**Key words:** Education; Mathematics education; Geometry; teaching strategies; evaluation.

## INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas son un tema de interés en la actualidad, en particular porque el mundo laboral exige carreras científicas y se siguen cosechando fracasos de los estudiantes costarricenses en las pruebas estandarizadas como PISA, TERCE, DiMa y Bachillerato (Ruiz, 2013).

El currículo de Matemática para secundaria está constituido por cinco áreas: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra, así como Estadística y Probabilidad (MEP, 2012). Cada una de ellas presenta sus particularidades respecto a: obstáculos epistemológicos y ontogénicos, didáctica de su enseñanza y elementos para su evaluación. De acuerdo con Calvo, Deulofeu, Jareño y Morera (2016), estas particularidades están relacionadas con los momentos del desarrollo de una clase: la planificación, su gestión y valoración.

Para efectos de este trabajo, se centrará la atención únicamente en la evaluación o valoración que se debe realizar cuando se expone a los estudiantes ante la resolución de problemas en el área de Geometría, esto debido a que profundizar en los tres aspectos señalados por Calvo et al. (2016), para cada área y nivel escolar, sería imposible en este espacio.

Es importante indicar que la resolución de problemas ha sido abordada tradicionalmente desde tres enfoques: el primero es *aprender para resolver problemas* que enfatiza en que el estudiante aprenda a resolver problemas a partir del dominio conceptual-procedimental de los contenidos matemáticos y del manejo de heurísticas; el segundo se denomina *aprender a resolver problemas*, se vincula con el trabajo en olimpiadas matemáticas y programas de competición. El tercero y último concibe la resolución de problemas como estrategia para iniciar procesos de reflexión que lleven a la construcción de conocimientos matemáticos y se denomina *aprender mediante la resolución de problemas*, es el enfoque que asume el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) a partir del 2012 (Alfaro y Barrantes, 2015; Ruiz, 2017; Zumbado et al., 2018).

La evaluación sumativa en Matemáticas cuando se emplea el tercer enfoque, que se se consignará en adelante como la resolución de problemas como estrategia metodológica, ha sido un campo poco indagado, debido a las dificultades para encontrar los instrumentos idóneos para cuantificar el aprendizaje adquirido por los estudiantes a través de este medio (Callejo, 1998; Santos, 2007; Ruiz, 2017; Zumbado et al., 2018).

Existen investigaciones sobre evaluación de los aprendizajes en resolución de problemas, que asumen el primero y segundo enfoque, por tanto, emplean ítems de selección única y respuesta corta, que utilizan la Teoría Clásica de los Test (TCT), Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) o el Modelo de Rasch, para medir el aprendizaje de los conocimientos. Sin embargo, las herramientas son insuficientes para hacer alguna medición cuando se trata del aprendizaje obtenido mediante esta estrategia, la cual implica poner en funcionamiento algo más que el contenido matemático (Prieto y Delgado, 2003; Martinovic & Manizade, 2018; Nortvedt & Buchholtz, 2018; Yang & Li, 2018).

A partir de la reforma curricular de Matemáticas en 2012, cuando los programas oficiales establecen la resolución de problemas como estrategia metodológica principal, la problemática de la evaluación se ha insertado en la comunidad educativa nacional, pero sin producir ninguna solución pragmática para cuantificar el conocimiento (Ruiz, 2017; Zumbado et al., 2018).

Respecto al área de Geometría, es importante conocer qué persigue el ente ministerial, antes de adentrarse en una posible respuesta a la pregunta planteada. La posición del MEP (2012) coincide con las ideas de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE, 2017) sobre cómo esta área es la que organiza los fenómenos de espacio y forma. También, concuerdan en que los objetos geométricos son parte de la realidad, por tanto, ambas instituciones privilegian la aproximación pragmática (pensamiento funcional) sobre el estudio de ideas abstractas, así promueven la visualización espacial y el manejo algebraico de algunas situaciones de la geometría del espacio.

Además, coinciden en el uso de las tecnologías digitales como un recurso que favorece habilidades para la comparación de objetos, las representaciones tridimensionales, las traslaciones y las rotaciones, entre otras.

Se destaca que el ente ministerial expone con detalle las limitaciones para el abordaje de la geometría de coordenadas y analítica. Así como es explícito en los alcances de la simetría axial y las transformaciones, dentro de la propuesta del MEP (2012) se señala que estos tópicos favorecen los vínculos entre la Geometría y el área de Relaciones y Álgebra.

Después de establecer las habilidades generales a las que se aspira en el área de Geometría durante la secundaria en Costa Rica, dentro del marco de la OCDE, la pregunta que surge naturalmente es ¿cómo evaluar de manera sumativa a los estudiantes cuando resuelven problemas de Geometría? Para tratar de encontrar una respuesta a esta interrogante, se planteó como objetivo explorar las ideas de algunos investigadores internacionales que aporten insumos a una propuesta evaluativa acorde con el MEP (2012). Se profundizará en cinco investigaciones y se asignará un título que se asocia con las ideas principales en cada una.

## LITERATURA SOBRE EL TEMA

### Evaluación en educación matemática y metodología

Para iniciar este apartado, se expondrán las ideas Nortvedt & Buchholtz (2018) que producto de una investigación bibliográfica sistemática sobre evaluación en educación matemática, política y equidad, han encontrado datos que permiten ubicar la problemática evaluativa que la rodea a nivel mundial, al respecto señalan que no hay avances en la temática porque no se valoran los asuntos fundamentales que rodean las competencias matemáticas en las pruebas como: plantear preguntas, conjeturas, argumentos y problemas; así como usar e intercambiar las representaciones de un objeto matemático y realizar una comunicación apropiada de las ideas involucradas. Los autores resaltan que hay un faltante en investigación y en instrumentos de evaluación (Nortvedt & Buchholtz, 2018).

Otro elemento que aporta esta investigación es el cuestionamiento asociado con el tipo de constructo que se mide en las evaluaciones que se plantean, sea a nivel de aula o mediante la macro evaluación como en las pruebas PISA o TIMSS. Además, es importante señalar que estos autores exponen como una posibilidad para la evaluación de los aprendizajes, centrar la atención en los procesos matemáticos establecidos por PISA y que el MEP (2012) asume dentro su propuesta curricular en Matemáticas.

Otro cuestionamiento de los autores es ¿cómo la tecnología puede influir en el proceso de valorar el aprendizaje?, debido a que impacta la visualización espacial en el área de la Geometría y puede favorecer los procesos de realimentación también de manera más efectiva e inmediata.

Se destacan los siguientes dos hallazgos, el primero, que existe una problemática en la elaboración de pruebas, lo denominan compartimentación de los conocimientos, lo que implica especificidad en las

preguntas. El segundo, que existe la necesidad de diversificar los instrumentos evaluativos, lo anterior porque los autores creen que no se debe delegar toda la valoración en un solo instrumento, debido a que no es posible medir el desarrollo longitudinal del pensamiento matemático con una sola herramienta (Nortvedt & Buchholtz, 2018).

## La evaluación de los aprendizajes, los libros de textos y los procesos matemáticos

Hunsader et al. (2014), realizaron una investigación sobre la forma en que los libros de texto para primaria y secundaria en los Estados Unidos presentaban instrumentos de evaluación de los aprendizajes y la forma en que incluyen los procesos matemáticos definidos por la NCTM para ese país. Dos de las preguntas de investigación eran, ¿en qué medida las evaluaciones que acompañan libros de texto publicados permitían proporcionar oportunidades para que los alumnos se involucraran en los procesos matemáticos de razonamiento, comunicación, conexiones y representaciones? Y ¿en qué medida las evaluaciones que acompañan libros de texto publicados permitían proporcionar oportunidades para que los estudiantes se involucraran en los procesos matemáticos a través del contenido, áreas, niveles de grado y editores?

Con el fin citado, seleccionaron los libros de texto más populares y tradicionales para cada nivel escolar, dentro de un grupo de editoriales dedicado a esta labor; Para secundaria, eligieron los textos relacionados con Álgebra I, Álgebra II y Geometría.

Se encontró que muchos de los libros poseían evaluación en línea e impresa con preguntas de selección única y algunas preguntas de respuesta construida o desarrollo. Es importante destacar que el interés de los investigadores estuvo centrado en este último tipo de preguntas en material impreso, debido a que permitían determinar en el trabajo de los estudiantes la presencia de los procesos matemáticos.

Se analizaron 314 capítulos, en donde se seleccionaron 6753 pruebas. La codificación de las pruebas se realizó por personas con entrenamiento basado en el marco teórico seleccionado, primero de manera individual y luego grupal, con arbitraje en caso de desacuerdo. Mediante el juicio de expertos (docentes de matemáticas, personas con conocimiento en educación matemática y evaluación de los aprendizajes, con grado de doctorado) y grupos focales, lograron identificar los elementos de interés, los cuales fueron procesados preliminarmente mediante estadística descriptiva.

También, emplearon el análisis multivariado de varianza (MANOVA) en SAS 9,3 para establecer la relación entre los libros de textos y las siguientes variables: contenido, áreas, niveles de grado, editores (Hunsader et al., 2014).

De este trabajo de investigación, se puede extrapolar de manera general a la evaluación de estudiantes, la importancia de emplear el juicio de expertos para validar los instrumentos (pruebas, problemas, criterios, indicadores, quices) por emplear con estudiantes. Su calificación se debe realizar empleando un marco teórico para el análisis y efectuar una comparación entre los elementos teóricos (expectativa) y los resultados obtenidos (realidad), esto a través de puntos de cohorte como lo emplearán Martinovic & Manizade (2018) más adelante.

Dentro de los resultados destacados, se encuentra que los educadores emplean los instrumentos que ofrecen los libros de texto (en algunos casos de manera única), sin considerar la calidad de la medición de los aprendizajes que la herramienta logra. Además, mediante las técnicas empleadas por los investigadores, lograron establecer algunas mediciones sobre los contenidos y una aproximación sobre la valoración de las situaciones que propiciaban los procesos matemáticos.

Se señala que aunque se plantean preguntas de respuesta construida en los textos, no existe forma de que los docentes puedan darle seguimiento o cuantificar el trabajo realizado por los estudiantes, incluso en aquellos cuyas pruebas estaban en línea, por tanto, no se cuenta con espacios reales para que los estudiantes demuestren las habilidades asociadas con los procesos matemáticos.

Los autores indican que existen diferencias significativas entre las pruebas planteadas por las diferentes editoriales, donde unas promueven los procesos matemáticos y otros ofrecen espacios reducidos o nulos (Hunsader et al., 2014).

Los resultados asociados a secundaria (estudiantes con edades entre los 14 y 17 años) y con la Geometría específicamente, indican que se ofrecen numerosos espacios en los textos y en los entornos virtuales para realizar representaciones de un concepto geométrico. También, se propicia la interpretación y creación de gráficos; sin embargo, esto es sumamente limitado para otras áreas como el Álgebra.

El proceso matemático conexión, es poco propiciado en las pruebas, no obstante, su presencia aumenta en el área de Geometría, los autores señalan que esto enviar un mensaje erróneo a los estudiantes, quienes pueden asociar solamente ciertos procesos matemáticos con una área determinada y creer que comunicar o razonar no se activan al hacer trabajo geométrico.

Razonamiento, comunicación, conexiones y representaciones, fueron los procesos investigados por Hunsader et al. (2014), ellos afirman que son fundamentales para desarrollar capacidades cognitivas superiores en los estudiantes; por tanto, recomiendan la revisión en profundidad de los textos por parte de los docentes y valorar las herramientas de evaluación propuestas, debido a que estas ignoran los procesos matemáticos y centran su atención en respuestas y no procedimientos.

## Evaluación del conocimiento de los docentes para la enseñanza de la Geometría

Martinovic & Manizade (2018), por su parte, realizaron un trabajo de investigación que se centró en la manera de medir el conocimiento matemático para la enseñanza de un tema particular de Geometría: el área del trapecio, con su respectiva herramienta de evaluación que consistía en una rúbrica.

Para la recolección de información durante el proceso indagatorio, emplearon dos técnicas, la primera el método Delphi para elaborar el instrumento inicial, con el cual se pretendía medir el conocimiento pedagógico del contenido para la enseñanza (PCK, por sus siglas en inglés), el cual corresponde al consenso de un grupo de profesionales, en este caso de 20 expertos. La segunda fue la teoría fundamentada o *grounded theory*, la cual permitió reconstruir los hallazgos en las diferentes etapas con base en algunos elementos teóricos preliminares.

Para desarrollar la investigación utilizaron pruebas con ítems de respuesta abierta y desarrollo, así como rúbricas, observación de aula, cuestionarios y encuestas, como es evidente emplearon un enfoque de métodos mixtos concurrentes, con fases cuantitativas y cualitativas en la recolección de datos, con el objetivo de desarrollar una herramienta de valoración y evaluación relacionada con el PCK, es importante destacar que algunos de las pruebas (test) aplicadas en la investigación estaban validadas previamente.

El principal aporte de Martinovic & Manizade (2018) corresponde a dos instrumentos específicos, una prueba sobre conocimiento pedagógico del contenido (el trapecio) y un cuestionario sobre conocimientos matemáticos sobre el trapecio. Cada uno de estos pasó por tres rondas de revisión por pares y procesos de edición en los que estuvieron involucrados cinco investigadores en educación matemática.

Debido a la perspectiva del área matemática en estudio, la cual concuerda con la OCDE (2017), MEP (2012) y Yang & Li (2018), los autores incluyen en sus instrumentos aspectos vinculados con la capacidad de describir, usar y visualizar los efectos de componer y descomponer formas geométricas.

Realizaron el trabajo de campo mediante la aplicación de seis instrumentos por parte de uno de los investigadores en diferentes momentos (estudio longitudinal 2013-2015) y en el anonimato de los 39 docentes participantes. Respecto a los instrumentos sobre el contenido de Geometría específicamente, se establecieron puntos de cohorte para brindar una calificación integral del educador.

Debido a que la teoría fundamentada emplea procesos cíclicos, los autores indican que después de varias repeticiones lograron generar una rúbrica que aproximaba el PCK, producto de la saturación de los datos, lo que a juicio de los autores es un criterio de confiabilidad, así como el proceso de triangulación sobre las cinco dimensiones abordadas en los seis instrumentos empleados.

En particular, sobre la evaluación del conocimiento de los docentes, se puede extrapolar la dimensión denominada "Conocimientos de Geometría" a la valoración del conocimiento de los alumnos. Martinovic & Manizade (2018) aportan un ítem de selección múltiple, donde se proponen estrategias de solución detalladas de un problema y la persona debe elegir todas las opciones que sean correctas. Cada opción implica un proceso de resolución y para poder discriminar si es correcto o no, requiere de activar el razonamiento y aplicar el contenido matemático: la composición y descomposición de formas geométricas. Este tipo de pregunta puede ser un modelo para la evaluación del aprendizaje adquirido por los estudiantes.

Asimismo, establecieron la validez de una rúbrica que se construyó mediante criterio de expertos, consideraron las siguientes dimensiones como fundamentales para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría:

- Conocimiento de Geometría
- Conocimiento de los retos y entendimientos de los estudiantes
- Conocimiento de estrategias y herramientas de instrucción aplicables
- Capacidad para proporcionar extensiones geométricas
- Conocimiento de las estrategias y herramientas de instrucción aplicables
- Capacidad para proporcionar extensiones geométricas

## Comprensión lectora y construcción geométrica

Otro caso que centra su atención en la evaluación de un tópico particular, fue la investigación de Yang & Li (2018), su objetivo era establecer criterios de evaluación en Geometría. Partieron de la posición de Duval (2006), éste último propone tres tipos de procesos cognitivos: proceso visual, construcción de figura y proceso discursivo para explorar, explicar o probar. También afirma que la construcción geométrica (con regla y compás o *software* graficador) puede jugar un papel importante para cerrar la brecha entre la visualización (proceso visual) y el razonamiento deductivo (proceso discursivo).

De acuerdo con Yang & Li (2018) es necesario evaluar la comprensión de lectura, en particular si se le considera como medio de aprendizaje. Además, señalan que ser un buen lector, no garantiza ser buen lector de textos matemáticos.

Los autores describen el discurso matemático como la unión de varias características: es técnico, denso, multisemiótico, se basa en el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y la visualización, todas interactuando de una manera conjunta y específica en esta disciplina.

Los autores seleccionaron un conjunto de tareas matemáticas donde la construcción geométrica con regla y compás era central, debido a que la actividad incluía conocimientos procedimentales y conceptuales de manera simultánea e implicaba el razonamiento matemático para comprender las relaciones lógicas entre los pasos de construcción y sus figuras correspondientes; por tanto, era necesario comprender el discurso matemático.

Procedieron luego a analizar las posibles dificultades durante la resolución de la tarea, desde la alfabetización lectora según la perspectiva de PISA y la aprehensión de figuras geométricas de Duval (1995). Además, se incluyeron ideas de la resolución de problemas y los niveles de complejidad, lo anterior de manera análoga a la propuesta de OCDE (2017) y el MEP (2012).

Con base en lo anterior, construyeron una tabla con nueve elementos que conforman tres categorías, que incluyen tres niveles de complejidad denominados: *recuperando o reconociendo*, *interpretando o conectando*, *reflejando o razonando* y tres actividades dosificadas, para cada uno de los niveles de complejidad: *identificación del objeto matemático*, *acción constructiva con herramientas* y *resultados de la acción con herramientas*, cada uno de estos componentes asociados con una hoja de trabajo para estudiantes (HTE) que solicitaba, mediante una secuencia de pasos, la resolución de tareas matemáticas asociadas con la construcción geométrica con regla y compás, es importante señalar que la HTE presenta formato de prueba corta o quiz.

Según Yang & Li (2018), se procedió de la siguiente manera para validar el instrumento, se sometió a la revisión por parte de dos investigadores de educación matemática y se aplicó en un aula como plan piloto. Después de la valoración de los expertos y el pilotaje con estudiantes, se editó la HTE, de manera que las frases empleadas en las instrucciones fueran más comprensibles para el público meta.

Posteriormente, se aplicó la HTE a 219 estudiantes de noveno año, los cuales habían aprendido las construcciones geométricas el año lectivo anterior; fueron seleccionados de manera aleatoria entre 18 clases de la misma institución pública en Taiwán y cuyas pruebas de inteligencia no tenían diferencias significativas (pruebas de admisión). La calificación de las HTE se realizó de la siguiente forma: las preguntas de respuesta abierta fueron calificadas con créditos parciales de acuerdo con la respuesta esperada, en selección única un punto por acierto y en selección múltiple se asignó un crédito parcial dependiendo de la proporción de respuestas correctas al número de opciones.

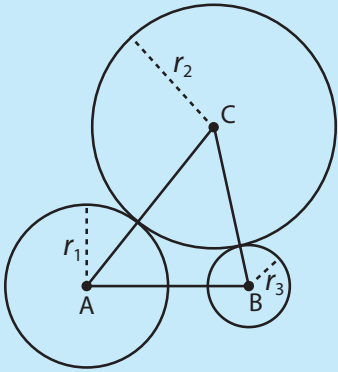
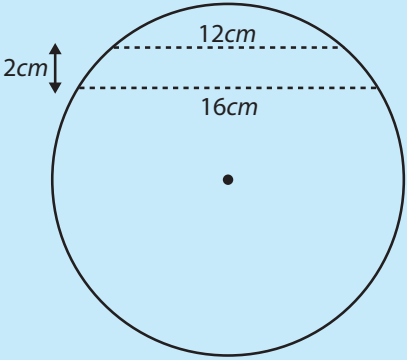
Los autores afirman haber conseguido un coeficiente de confiabilidad alfa de Cronbach de 0,89 con un índice de discriminación de ítems superior a 0,4 lo que reafirma que fue buena. Se destaca que solamente 197 quices ofrecieron datos analizables (Yang & Li, 2018), se debe señalar que se presume que los autores emplearon la TRI para el análisis de los ítems objetivos.

Concluyen que el marco bidimensional o criterios de evaluación que proponen para evaluar, considerando niveles de complejidad y la HTE aplicados en su investigación, se pueden aplicar como un marco general para evaluar la comprensión de los textos matemáticos por parte de los estudiantes. También, señalan que este es un producto que puede ayudar a mejorar la valoración de las pruebas comprensivas y que el resultado en éstas pueda aumentar con solo mejorar las preguntas planteadas. Por tanto, los autores consideran que los criterios propuestos ayudarían a otros docentes a diseñar instrumentos, instrucciones y a favorecer la comprensión lectora de los estudiantes en Matemáticas.

## Resolución de problemas en un contexto matemático geométrico

Saorín, Torregrosa y Quesada (2018) realizaron una investigación con 33 alumnos, con edades entre los 15 y 17 años (primer curso de bachillerato), los estudiantes tenían las siguientes características: no habían recibido instrucción específica acerca del proceso de demostración matemática en contexto geométrico, sin embargo habían tenido contacto con la resolución de problemas de manera empírica.

Los investigadores expusieron a los estudiantes a dos problemas empíricos que contenía figuras geométricas e información de algunas longitudes en el enunciado, es importante señalar que los autores consideraron los conocimientos previos de los alumnos antes de exponerlos al proceso de resolución. Las tareas matemáticas empleadas se pueden considerar según la clasificación de Ruiz (2018) como problemas con contexto matemático, debido a que emplean únicamente conceptos y procedimientos exclusivos de las Matemáticas, son abstractos y no emplean ningún elemento contextualizado.

Problema 1	Problema 2
<p>Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 cm y 36 cm. Tomando como centro cada uno de los vértices del triángulo se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos.</p> <p>Calcular los radios de las tres circunferencias.</p> 	<p>Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia de la figura miden 12 cm y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm.</p> <p>Calcular el radio de la circunferencia.</p> 

**Figura 1.** Problemas empíricos de figuras geométricas.  
Fuente: Adaptado de Saorín, Torregrosa y Quesada (2018).

El primero de ellos, involucra tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos de diferentes dimensiones, donde los centros de cada uno corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo, cuyas dimensiones de los catetos son indicadas en el enunciado, se solicita determinar los radios de las tres circunferencias. Por otra parte, el segundo problema es una circunferencia donde se conocen las longitudes de dos cuerdas paralelas y la distancia entre ellas, se solicita determinar la longitud del radio.

El procedimiento consistió en analizar las respuestas de los estudiantes de manera similar a la aplicada por Yang & Li (2018), pero en tres fases. La primera consistió en una selección por segmentos de las respuestas, las cuales fueron transcritas para identificar las acciones operativas y de discurso utilizadas por los estudiantes, la segunda profundiza en las características de las acciones realizadas y la relación con la resolución de los problemas, se enfatizó en la visualización y la identificación de las relaciones entre



los conceptos. Finalmente, se analizó el reconocimiento, la interpretación y la manipulación de las representaciones matemáticas, lo que los autores denominan “los procesos de conversión entre registros” (Saorín, Torregrosa y Quesada, 2018, p. 4).

De esta investigación se desprende que el proceso de análisis de un problema de Geometría, se puede realizar mediante fases, donde cada una está relacionada con un marco conceptual, en este caso emplearon el Razonamiento Configural Extendido de Torregrosa, (2017), para establecer el nivel de proximidad a la respuesta esperada y la intervención de algunos procesos matemáticos. Aun cuando esta propuesta no fue empleada para una calificación cuantitativa, sino cualitativa para el nivel de aprendizaje del estudiante, puede ofrecer recursos para identificar la forma y los elementos por considerar cuando se califica el trabajo de los alumnos.

Dentro de los resultados más destacados, se encuentra la información sobre el desenlace de los procesos de resolución, uno de ellos denominado “truncamiento”, que corresponde a acciones bien encaminadas hacia la resolución del problema, pero que no logran conseguir una respuesta correcta, éste se presenta en un porcentaje mayor en el problema 1 que en el problema 2. Mientras que la “conjetura sin demostración” que es haber conseguido una respuesta aunque no se comprobaron algunos de los datos que se dedujeron de la representación gráfica (sin hacer una demostración o comprobación de la veracidad del dato) se presentó en un porcentaje mayor en el problema 2 que en el número 1 (Saorín, Torregrosa & Quesada, 2018), lo cual muestra una implicación a nivel evaluativo, las tareas matemáticas poseen un nivel de complejidad diferente, por tanto, existe un incremento en la demanda cognitiva de los estudiantes.

A nivel de evaluación de los aprendizajes, se puede destacar la utilidad de la siguiente idea, para resolver el problema 1, los datos necesarios estaban en el encabezado y la representación gráfica, mientras que en el problema 2, era necesario extraer información implícita de la representación gráfica, por tanto, el segundo problema implica realizar procesos cognitivos más complejos. Lo anterior, coincide con la gradualidad del proceso *representar* propuesto por Ruiz (2018), donde al aumentar el grado de cada proceso matemático la complejidad del problema aumenta.

De acuerdo con el modelo de Ruiz (2018), el indicador 1 del grado 1 para el proceso matemático corresponde a “identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones ya estudiadas de objetos matemáticos” y el indicador 1 del grado 2 corresponde a “interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada” (p. 127); por tanto, en los indicadores del grado 1 y grado 2 se puede percibir y establecer el aumento en la complejidad del trabajo cognitivo mencionado por Saorín, Torregrosa y Quesada (2018) para los problemas 1 y 2.

Es importante resaltar la similitud de las ideas de Saorín, Torregrosa y Quesada (2018) y los indicadores propuestos por Ruiz (2018) de manera general para el proceso matemático *representar*.

Finalmente, los autores concluyen que esta es una aproximación para el análisis de problemas de Geometría, cuando se emplea papel y lápiz, debido a que ambas tareas matemáticas fueron planteadas para la resolución sin uso de tecnología y que las características de la presentación del problema, de acuerdo con los resultados, influye en el desenlace (posiblemente por estar involucrado el nivel de complejidad).

Saorín, Torregrosa y Quesada (2018) indican que quedan preguntas pendientes, una de ellas, ¿por qué algunos estudiantes logran extraer de la representación gráfica información para utilizarla de manera algebraica y plantear alguna estrategia de resolución?, mientras que otros no logran hacerlo, debido a que la información no está explícita. Otra pregunta es ¿por qué los estudiantes descartan la representación gráfica después de hacer alguna propuesta algebraica de solución? Los autores indican que las preguntas pueden ser consideradas al plantear alguna herramienta evaluativa en Geometría, con el objetivo de construir instrumentos con un diseño más universal (MEP, 2018).

## METODOLOGÍA

El artículo, producto de una revisión bibliográfica, está orientado a la búsqueda de insumos en el contexto internacional sobre la evaluación sumativa en la resolución de problemas en el área de Geometría, para el contexto costarricense que posee un currículo que establece la resolución de problemas como estrategia metodológica principal (MEP, 2012).

Se ha procedido a revisar revistas indexadas que abordan temáticas relacionadas con educación entre los años 2014 y 2019, para lo cual se han consultado bases de datos de prestigiosas entidades académicas, los artículos seleccionados han cumplido con requerimientos como el abordaje simultáneo de: Geometría, resolución de problemas y evaluación de los aprendizajes. Cada publicación debía contar con un respaldo bibliográfico contundente, donde se incluyeran textos clásicos de los tres tópicos citados, así como publicaciones recientes de alto nivel.

De cada uno de los textos seleccionados se ha extraído la siguiente información: aportes a la evaluación de los aprendizajes en Geometría, recolección y análisis de la información, hallazgos más importantes que puedan ser de utilidad para el tema tratado.

Fueron excluidos de este artículo aquellos documentos que no ofrecían ejemplos concretos de su propuesta teórica o aquellos que no consideraban las ideas de la OCDE, debido a que el MEP (2012) basa su propuesta en ellas, esto ha llevado a la selección de cinco textos únicamente y una exclusión de diez artículos.

Para el análisis de la información, se ha organizado de manera deductiva, partiendo de los elementos generales de la evaluación en educación matemática hasta la propuesta de evaluación de temas específicos del área de Geometría para secundaria, aunque no correspondan a los conocimientos de la malla curricular actual. Es importante señalar que aún no hay acceso libre a todos los textos que pueden ser de interés, por tanto, se tuvo que prescindir de ellos por los costos monetarios que implicaba.

## RESULTADOS

Dentro de los hallazgos más importantes se encuentra que la comunidad internacional ha estado haciendo esfuerzos por elaborar herramientas técnicamente correctas y pertinentes, para realizar una evaluación sumativa en la educación matemática; con este fin han empleado diversas técnicas e instrumentos para la investigación: grupos focales, juicio de expertos, análisis de HTE, rúbricas, ítems de selección múltiple y de respuesta construida (Hunsader et al., 2014; Ruiz, 2017; Martinovic & Manizade, 2018; Nortvedt & Buchholtz, 2018; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2018; Yang & Li, 2018).

Los grupos focales y el juicio de expertos son técnicas que permiten obtener evidencia de validez y confiabilidad de las rúbricas, las HTE, los ítems y las propuestas evaluativas en general.

El manejo estadístico de los resultados, como en el caso de usar las HTE (Yang & Li, 2018; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2018), abrió la posibilidad de establecer conclusiones generalizables sobre los instrumentos elaborados. Las HTE son fuente de información valiosa para poder diagnosticar, clasificar y analizar diferentes elementos relacionados con el aprendizaje de los estudiantes, el avance de las habilidades y la presencia de algunos indicadores de los procesos matemáticos como los propuestos por Ruiz (2018).

Se destaca que las rúbricas han sido empleadas por diferentes investigadores como una herramienta para poder dosificar las actividades que realiza el estudiante durante el proceso de resolución de un problema. Al respecto, se señala que existen aspectos que se deben incluir en la evaluación de la Geometría como: la descomposición y composición de figuras, la visualización espacial, pero también se debe de

considerar la comprensión lectora en Matemáticas que se puede asociar a los niveles de complejidad (Saorín, Torregrosa y Quesada, 2018).

Otro resultado, es la identificación de los puntos cohorte como instrumento para la evaluación de aprendizajes, debido a que se puede utilizar para establecer una calificación, tomando como punto de partida algún marco teórico (expectativa) y los datos hallados en la realidad mediante el análisis de las HTE. Por ejemplo, después de un pilotaje permitiría determinar un parámetro de comparación producto de la interacción entre la teoría y la realidad (Hunsader et al., 2014; Martinovic & Manizade, 2018), es evidente que aquí el juicio de expertos es fundamental para establecer el instrumento definitivo con que se hará la inmersión en el campo.

Otra idea que puede ser de utilidad es analizar los problemas por fases, pero debe haber un marco conceptual de referencia para aproximar una respuesta y tener un parámetro de comparación donde los puntos de cohorte vuelvan a ser protagonistas.

Se destaca que las preguntas deben ser generales y no inclinarse hacia la especificación, así como hacer pruebas comprensivas con ítems de respuesta construida calificadas con créditos parciales. La redacción de las preguntas debe ser clara de manera que la comprensión lectora matemática este acorde con el nivel de los estudiantes. Además, al plantear ítems de selección múltiple, se debe procurar que se active el proceso de razonar y argumentar mediante la presentación de varios procesos de resolución, con el propósito de determinar todas las opciones correctas.

El proceso matemático *representar* parece haber sido favorecido en Geometría y se evidencia en los diferentes trabajos de investigación analizados, debido al uso de contextos matemáticos que emplean imágenes como la forma privilegiada de presentar los problemas.

Se destacan los procesos matemáticos como ideas orientadoras para generar y validar herramientas para la evaluación de los aprendizajes o la valoración del conocimiento tanto de los estudiantes como de los docentes, ya que con ellos se va más allá de las respuestas, pues se trata de analizar la intervención o activación de actividades cognitivas superiores como lo plantea Ruiz (2018), mediante la Estructura de Intervención de los Procesos Matemáticos en Problemas (EIPP).

Respecto a la tecnología, se señala que es una herramienta que favorece la visualización, sin embargo, no se ha potenciado su riqueza para realizar evaluación de los aprendizajes o potenciar los procesos de razonar y argumentar (Nortvedt & Buchholtz, 2018; Ruiz, 2018).

A continuación, se presenta un cuadro resumen que expone los resultados más destacados de los investigadores en relación con el tema tratado, se puntualiza qué pretendían evaluar, cómo lo hicieron y sus recomendaciones para futuras investigaciones sobre la evaluación desde la perspectiva planteada en este texto.

TABLA 1

Insumos para una propuesta evaluativa que considera investigaciones en educación matemática entre el 2014 y 2019

Investigadores	Resultados destacados	¿Qué pretendía evaluar?	¿Cómo lo evaluaron?	Futuras investigaciones
Nortvedt & Buchholtz (2018).	Señalan que existe una problemática en la elaboración de pruebas por una tendencia hacia la compartimentación de los conocimientos. Además, indican la necesidad de diversificar los instrumentos evaluativos.	Las competencias matemáticas (OCDE, 2017).	No realizaron una evaluación. Identificaron que se requiere valorar las siguientes acciones: plantear preguntas, conjeturas, argumentos y problemas, usar e intercambiar representaciones y realizar una comunicación apropiada de las ideas involucradas.	Realizar revisiones bibliográficas sobre el abordaje de los contenidos.
Hunsader et al. (2014).	Indican que los libros de texto no propician los procesos matemáticos y los docentes emplean este tipo de recursos en el aula sin hacer revisiones apropiadas.	Las competencias matemáticas (OCDE, 2017) y la presencia de procesos matemáticos NCTM (2000).	Ítems de respuesta construida	Codificar los ítems de respuesta construida con personal capacitado. Emplear para procesos de validación, grupos focales y juicio de expertos. Establecer puntos de cohorte.
Martinovic & Manizade (2018).	Aportan una prueba específica y validada sobre el conocimiento pedagógico del trapecio y un cuestionario sobre conocimientos matemáticos del mismo tópico. Además, una rúbrica que aproximaba el PCK.	Conocimiento matemático del trapecio. La capacidad de describir, usar y visualizar los efectos de componer y descomponer formas geométricas.	Ítems de selección múltiple para discriminar estrategias de solución y la rúbrica.	Emplear diversidad de técnicas e instrumentos para recolectar información: observación de aula, cuestionarios, encuestas, juicio de expertos, pruebas con ítems de respuesta abierta, desarrollo y rúbricas. Establecer puntos de cohorte.
Yang & Li (2018).	Concluyen que la rúbrica y la HTE, elaborado por su equipo, se puede aplicar como un marco general para evaluar la comprensión de los textos matemáticos por parte de los estudiantes y que puede ayudar a mejorar la valoración de las pruebas comprensivas.	Construcciones geométricas.	Ítems de respuesta abierta y selección múltiple que fueron calificadas con créditos parciales e ítems de selección única. Procesos cognitivos: visual, construcción de figura y discursivo para explorar, explicar o probar (Duval, 2006). Además, la comprensión lectora en matemáticas y una rúbrica que incluye niveles de complejidad.	Emplear el análisis de HTE y un pilotaje. Recurrir al análisis estadístico descriptivo.
Saorín, Torregrosa y Quesada (2018).	Identifican el "truncamiento" y la "conjetura sin demostración" durante la resolución de los problemas estudiados.	Determinar longitudes desconocidas en circunferencias.	Razonamiento Configural Extendido de Torregrosa, (2017). Además, consideraron los niveles de complejidad y procesos matemáticos (OCDE, 2017).	Emplear el análisis de HTE por segmentos de la respuesta. Recurrir al análisis estadístico descriptivo.

Fuente: Elaboración propia.

## CONCLUSIONES

En Costa Rica, es necesario realizar una propuesta evaluativa que permita aproximar la competencia matemática que el MEP (2012) persigue. Como señalan Nortvedt & Buchholtz (2018) es necesario tratar de cuantificar la conjetura, el planteamiento de problemas, la construcción de argumentos, el uso apropiado de las representaciones, la comunicación en términos correctos matemáticamente, aunque no formales, así como la capacidad de conectar los conocimientos entre sí.

Por tanto, para ofrecer una respuesta a la pregunta planteada ¿cómo evaluar de manera sumativa a los estudiantes cuando resuelven problemas de Geometría? los insumos aquí expuestos indican que se requieren indicadores asociados con los procesos matemáticos, materializados a través de rúbricas. Además, se deben plantear pruebas comprensivas cuyos ítems sean diversos y favorezcan el razonamiento y la argumentación, que exista diversidad en los instrumentos empleados para poder medir apropiadamente el desarrollo a través del tiempo del pensamiento matemático de los estudiantes, tal como lo exponen Nortvedt & Buchholtz (2018).

Una herramienta que se puede usar en las investigaciones para validar instrumentos de evaluación de los aprendizajes durante un pilotaje, son las entrevistas cognitivas, técnica que ninguna investigación empleó. Su énfasis debe estar en la prueba cognitiva de reporte verbal, del tipo denominado “sondeo de proceso mental” de manera que se pueda profundizar en los conocimientos, las habilidades específicas de los programas de Matemáticas y las interacciones aritméticas, geométricas e incluso algebraicas que usó cada uno de los alumnos para la resolución de un problema de Geometría, lo anterior mediante preguntas semi-estructuradas, esto se debe realizar en un ambiente controlado de manera individual y ser registradas mediante grabación de audio para su posterior transcripción (Smith-Castro y Molina, 2011). También, es necesario emplear el juicio de expertos y los puntos de cohorte como se ha mencionado previamente.

En caso de usar la información de las HTP y los registros de las entrevistas cognitivas, se ofrecerán de manera conjunta e integral insumos para validar los indicadores o criterios seleccionados para cuantificación del aprendizaje de los estudiantes en una rúbrica, porque se podrán identificar omisiones, así como desechar u optimizar los aspectos por calificar.

Es importante señalar que cualquier propuesta que se genere no debe olvidar la realidad nacional sobre los docentes que deben aplicar instrumentos de evaluación a un número significativos de estudiantes. Por tanto, el pragmatismo debe estar considerado en su elaboración y aplicabilidad, con el fin de que su uso pueda impactar la calidad de la educación matemática, de lo contrario, las herramientas planteadas no serán viables, como las de muchos artículos considerados para este texto, por ser ideas inaplicables en nuestro contexto.

## REFERENCIAS

- Alfaro, C. & Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática*, 3(4), 83-98. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6902/6588>
- Callejo, M. (1998). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.
- Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., & Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Hunsader, P., Thompson, D., Zorin, B., Loyden, A., Zakrzewski, J., Karadeniz, I., Fisher, E. & MacDonald, G. (2014). Assessments accompanying published textbooks: the extent to which mathematical

- processes are evident. *ZDM Mathematics Education*, 46(5), 797-813. DOI 10.1007/s11858-014-0570-6. Recuperado de <https://link-springer-com.cidreb.uned.ac.cr/content/pdf/10.1007/2Fs11858-014-0570-6.pdf>
- Martinovic, D. & Manizade, A. (2018). The challenges in the assessment of knowledge for teaching geometry. *ZDM Mathematics Education*, 50(4), 613-629. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0934-4>
- Ministerio de Educación Pública. (2018). *Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*. Recuperado de [http://www.drea.co.cr/sites/default/files/Contenido/09\\_Folleto\\_Diseño\\_Universal\\_para\\_el\\_Aprendizaje.pdf](http://www.drea.co.cr/sites/default/files/Contenido/09_Folleto_Diseño_Universal_para_el_Aprendizaje.pdf)
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. San José: Ministerio de Educación Pública.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Resumen Ejecutivo Principios y Estándares para la Educación Matemática. (Trad. C. Matus). Recuperado de <https://docplayer.es/39947421-Resumen-ejecutivo-principios-y-estandares-para-la-educacion-matematica.html>
- Nortvedt, G. & Buchholtz, N. (2018). Assessment in mathematics education: responding to issues regarding methodology, policy, and equity. *ZDM Mathematics Education*, 50(4), 555-570. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0963-z>
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo : Lectura, matemáticas y ciencias*, Versión preliminar, París: OECD Publishing. Recuperado de <https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISA-D%20FrameworkPRELIMINARY%20versionSPANISH.pdf>
- Prieto, G. & Delgado, A. (2003). Análisis de un test mediante el modelo de Rasch. *Psicothema*, 15(1), 94-100. Recuperado de <http://www.psicothema.com/pdf/1029.pdf>
- Ruiz, A. (2013). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 8(Número Especial). Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1866>
- Ruiz, A. (2017). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 12(Número Especial). Recuperado de: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/2552/showToc>
- Ruiz, A. (2018). *Evaluación y pruebas naciones para un currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores*. Ciudad de México: CIAEM.
- Saorín, A., Torregrosa, G. & Quesada H. (2018). Razonamiento Configurial Extendido: coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos empíricos. *Memorias del II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Recuperado de <http://ciaem-redumate.org/cmacyc/index.php/iicemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/72/88>
- Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Editorial Trillas.
- Smith-Castro, V. & Molina, M. (2011). La entrevista cognitiva: Guía para su aplicación en la evaluación y mejoramiento de instrumentos de papel y lápiz. *Serie de Cuadernos Metodológicos, Cuaderno 5*. Recuperado de <http://www.iip.ucr.ac.cr/sites/default/files/contenido/cuamet5.pdf>
- Yang, K. & Li, J. (2018). A Framework for Assessing Reading Comprehension of Geometric Construction Texts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(1), 109-124. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9770-6>
- Zumbado, M., Sánchez, A., Mora, M. & Salas, B. (2018). *Propuesta de evaluación de los aprendizajes en un currículo que involucra la resolución de problemas como estrategia metodológica* (Reporte de investigación inédito). San José: Cátedra de Didáctica de la Matemática, UNED.